

# Ajuda do GeoGebra

[www.geogebra.at](http://www.geogebra.at)

*Autor: Markus Hohenwarter,*

*Tradução: Jorge Geraldes, [www.jgeraldes.net](http://www.jgeraldes.net)*

*Versão em português de Portugal (pt\_pt)*

20 de Junho de 2006

# Índice geral

Índice geral	1
<b>1. Capítulo 1 - O que é GeoGebra?</b>	<b>4</b>
<b>2. Capítulo 2 - Exemplos</b>	<b>5</b>
2.1. Triângulo com ângulos .....	5
2.2. Função afim $y = mx+b$ .....	6
2.3. Centróide de três pontos A, B, C .....	7
2.4. Dividir um segmento de recta [AB] de acordo com a relação de 7 : 10 .....	8
2.5. Sistema de equações lineares com duas variáveis .....	9
2.6. Tangente à curva do gráfico de uma função no ponto $x=a$ .....	10
2.7. Exploração de funções polinomiais .....	11
2.8. Integrais .....	12
<b>3. Capítulo 3</b>	<b>13</b>
<b>3.1. Notas Gerais</b> .....	<b>13</b>
3.1.1. Menu de contexto .....	14
3.1.2. Mostrar e esconder .....	15
3.1.3. Traço .....	15
3.1.4. Zoom .....	15
3.1.5. Relação entre Eixos .....	15
3.1.6. Protocolo de Construção .....	15
3.1.7. Refazer .....	16
<b>3.2. Opções</b> .....	<b>17</b>
3.2.1. Opções Gerais .....	17
3.2.2. Ponto .....	19
3.2.3. Vector .....	19
3.2.4. Segmento de recta .....	20
3.2.5. Semi-recta .....	20
3.2.6. Polígono .....	20
3.2.7. Recta .....	21
3.2.8. Cónica .....	22
3.2.9. Arco e Sector .....	23
3.2.10. Número e ângulo.....	24
3.2.11. <i>Locus</i> - Lugar Geométrico .....	25
3.2.12. Transformações Geométricas .....	25
3.2.13. Texto .....	26
3.2.14. Imagens .....	26
3.2.15. Propriedades das Imagens .....	27

<b>4. Capítulo 4 - Entrada Algébrica</b>	<b>29</b>
4.1. Notas Gerais .....	29
4.1.1. Alteração de valores .....	29
4.1.2. Animação.....	29
4.2. Entrada Directa .....	30
4.2.1. Números e ângulos .....	30
4.2.2. Pontos e Vectores .....	31
4.2.3. Recta .....	31
4.2.4. Cónica .....	32
4.2.5. Função .....	32
4.2.6. Operações Aritméticas .....	34
4.3. Comandos .....	35
4.3.1. Comandos Gerais .....	35
4.3.2. Número .....	35
4.3.3. Ângulo .....	37
4.3.4. Ponto .....	38
4.3.5. Vector .....	39
4.3.6. Segmento .....	40
4.3.7. Semi-recta .....	40
4.3.8. Polígono .....	40
4.3.9. Recta .....	40
4.3.10. Cónica .....	42
4.3.11. Função .....	43
4.3.12. Arco e Sector .....	43
4.3.13. Imagem .....	45
4.3.14. Lugar Geométrico - Locus .....	45
4.3.15. Transformações Geométricas .....	45
<b>5. Capítulo 5 - Imprimindo e exportando desde GeoGebra</b>	<b>48</b>
5.1. Imprimindo .....	48
5.1.1. Zona Gráfica .....	48
5.1.2. Protocolo de Construção .....	49
5.2. Zona Gráfica como desenho .....	49
5.3. Zona Gráfica para a área de transferência .....	49
5.4. Protocolo de Construção como Página Web .....	50
5.5. Documento como Página Web .....	50

# Capítulo 1

## O que é o *GeoGebra*?

*GeoGebra* é um software de matemática que reúne geometria, álgebra e cálculo. O seu autor é o professor *Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo* na Áustria.

Por um lado, *GeoGebra* é um sistema de geometria dinâmica. Permite realizar construções tanto com pontos, vectores, segmentos, rectas, secções cónicas como com funções que a *posteriori* podem modificar-se dinamicamente.

Por outra parte, pode-se inserir equações e coordenadas directamente. Assim, *GeoGebra* tem a potência de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vectores e pontos; permite determinar derivadas e integrais de funções e oferece um conjunto de comandos próprios da análise matemática, para identificar pontos singulares de uma função, como raízes ou extremos.

Estas duas perspectivas caracterizam o *GeoGebra*: uma expressão na *janela algébrica* corresponde-se com um objecto na *janela de desenho* ou janela de gráficos e vice-versa.

# Capítulo 2

## Exemplos

Para ter uma visão geral das potencialidades do *GeoGebra* vamos ver alguns exemplos.

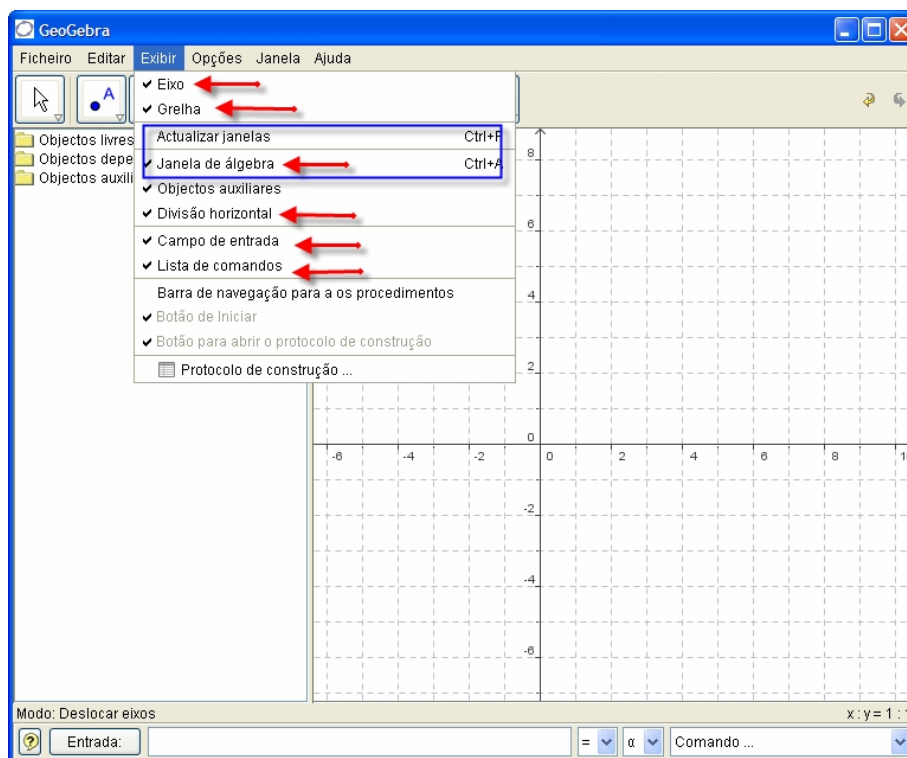
### 2.1. Triângulo e ângulos

Para começar, há que seleccionar a opção **Novo ponto** (ver 3.2) na barra de ferramentas e dar um *clique* três vezes na *área gráfica ou de desenho* para criar os três vértices A, B e C do triângulo.

De seguida passa-se a escolher a opção **Polígono** e dar um *clique* sobre os pontos A, B, C e, novamente, sobre A para criar o triângulo P na *janela algébrica*, pode ver-se a área do triângulo.

Para passar aos ângulos do nosso triângulo, temos que escolher a opção **Ângulo** na barra de ferramentas e dar um *clique* sobre o triângulo.

Agora, passa-se a escolher a opção **Mover** e arrastam-se os vértices para alterar dinamicamente o triângulo. Se não precisar da janela de Álgebra e/ou do Sistema de eixos coordenados, podem-se esconder através do menu **Exibir**.



## 2.2. Função afim $y = mx + b$

Concentramo-nos no significado de  $m$  e de  $b$  na condição  $y = mx + b$  experimentando diferentes valores para  $m$  e  $b$ . Para fazê-lo, anotaríamos as seguintes linhas como entrada no *campo de texto/linha de comandos* que aparece na parte inferior da janela depois de a tornar visível com a opção *Exibir – campo de entrada*, accionando a tecla **Enter** ao finalizar cada linha:

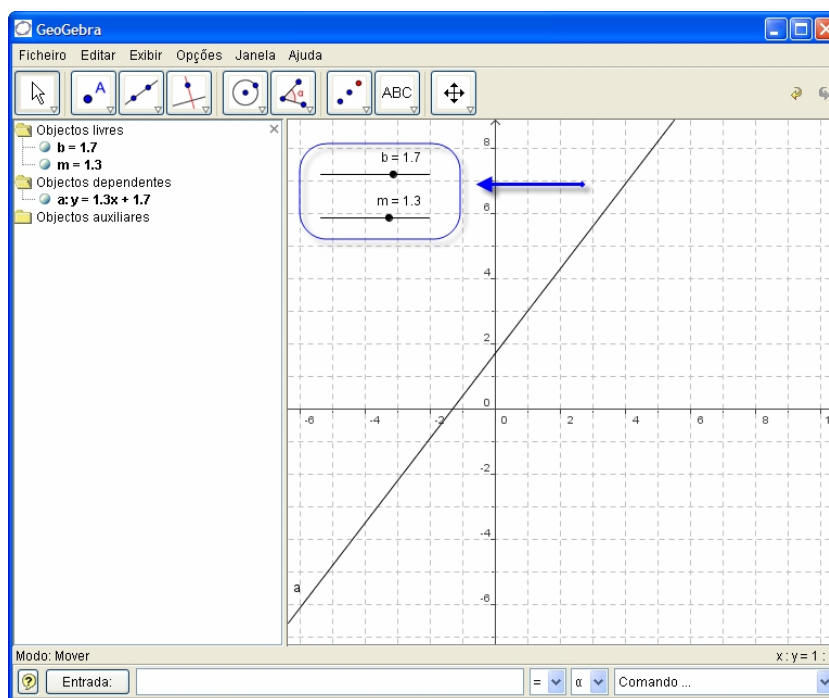
$$m = 1$$

$$b = 2$$

$$y = m * x + b$$

Agora podemos mudar  $m$  e  $b$  na *janela de álgebra* (dê um clique com o botão do lado direito e depois a opção **Editar**.) ou na entrada do campo de texto.

É muito simples modificar  $m$  e  $b$  utilizando as teclas de movimento de cursor (**animação**, 4.1.2) ou os *sliders* ou *selectores* (dê um clique no botão do lado direito sobre  $m$  ou  $b$  ; **Mostrar Objecto**; ver 3.2.10).



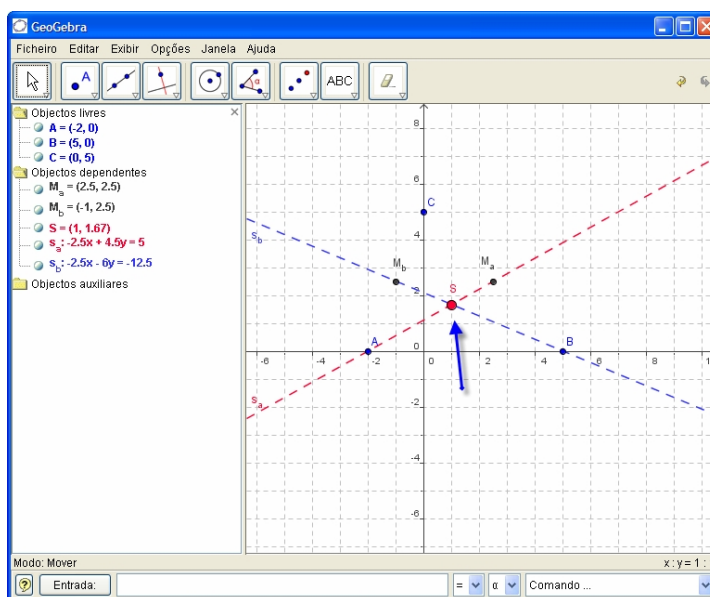
Da mesma forma poderíamos investigar as condições, que definem as cónicas como,

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad y = kx^2.$$

## 2.3. Centróide de três pontos A, B, C

Vamos agora, construir o *centróide* de três pontos ou *baricentro/centro de gravidade do triângulo* definido pelos três pontos - *ponto de intersecção das suas medianas* (segmentos de recta que unem um vértice com o ponto médio do lado oposto). De três pontos introduzindo as seguintes linhas como entradas no campo de texto/linha de comandos (accionando **Enter** ao finalizar cada linha). Pode, também utilizar o *rato* para realizar esta construção utilizando as correspondentes opções (ver 3.2) na barra de ferramentas.

```
A=(-2,0)
B=(5,0)
C=(0,5)
M_a = pontomédio[B,C]
M_b = pontomédio[A,C]
s_a = recta[A,M_a]
s_b = recta[B,M_b]
S=intersecção[s_a, s_b]
```



A alternativa será calcular o centróide directamente como:

$$S_1 = \frac{(A+B+C)}{3}$$
 e comparar ambos resultados utilizando o comando :

```
relação[S,S1]
```

Podemos agora, explorar se  $S=S_1$  é correcto para outras posições de A, B, C. Fazemo-lo seleccionando com o *rato*, a opção **Mover** (parte esquerdo da barra de ferramentas) e arrastando um dos pontos.

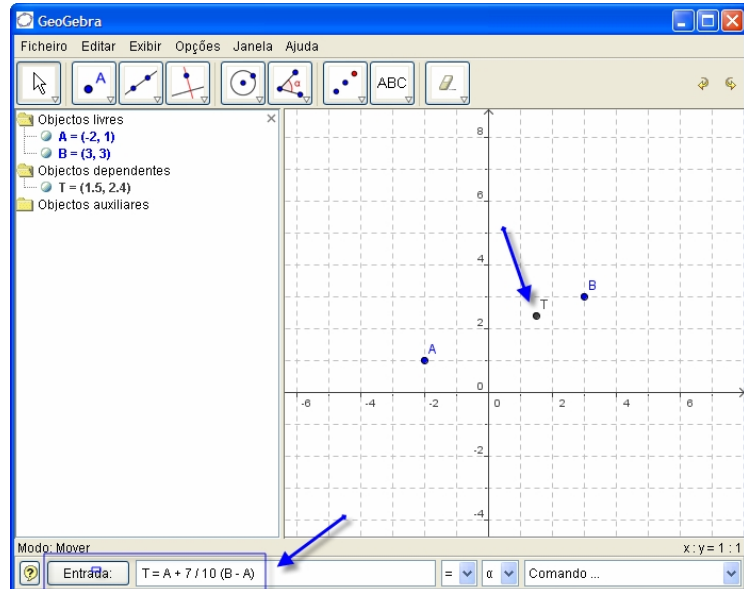
## 2.4. Dividir [AB] de acordo com a relação 7 : 10

Como o *GeoGebra* permite operar com vectores, resolução é simples.

$$\begin{aligned} A &= (-2, 1) \\ B &= (3, 3) \\ T &= A + 7/10 * (B - A) \end{aligned}$$

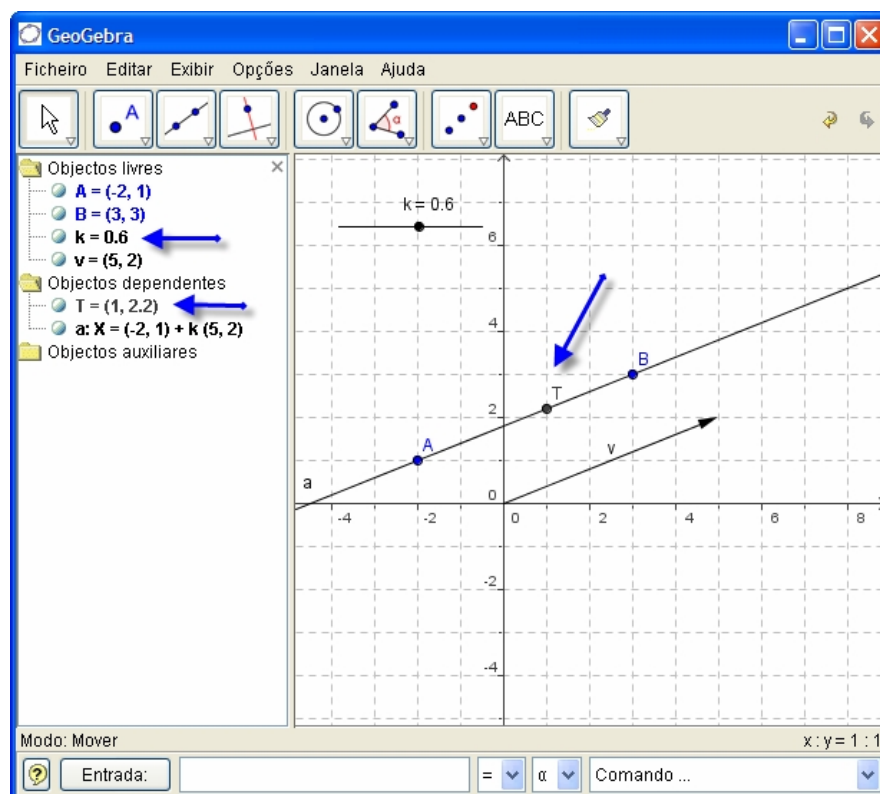
De outra maneira:

$$\begin{aligned} A &= (-2, 1) \\ B &= (3, 3) \\ v &= \text{vetor}[A, B] \\ T &= A + 7/10 * v \end{aligned}$$



Na etapa seguinte poderemos introduzir um número  $k$  (por exemplo, usando um *slider* ou selector (3.2.10)) e redefinir o ponto T como  $T = A + 7/10 * v$  (ver 3.1.7). Ao mudar  $k$  pode ver-se que o ponto T se desloca ao longo da linha recta.

Esta recta poderia ser introduzida agora vectorialmente (ver 4.2.3):  $X = T + k * v$

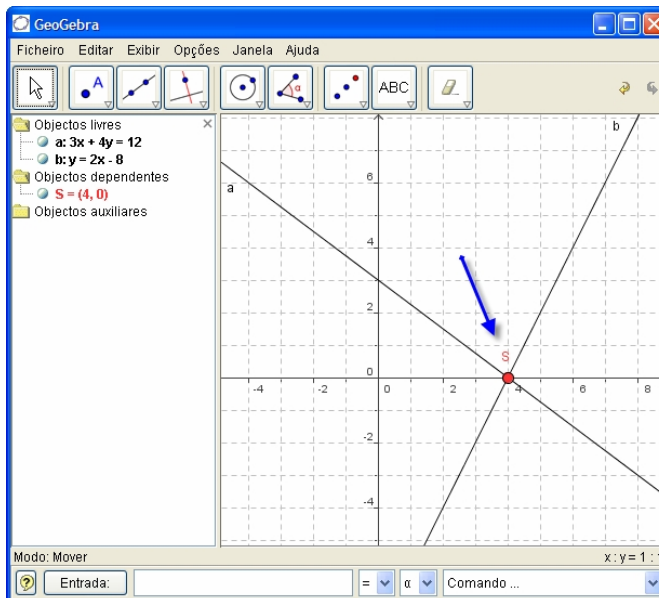




## 2.5. Sistema de equações lineares com duas variáveis

Duas equações lineares em  $x$  e  $y$  podem representar-se graficamente por duas rectas. A solução algébrica é o ponto de intersecção das duas rectas.

$$\begin{aligned} a: 3x + 4y &= 12 \\ b: y &= 2x - 8 \\ S &= \text{intersecção}[a,b] \end{aligned}$$

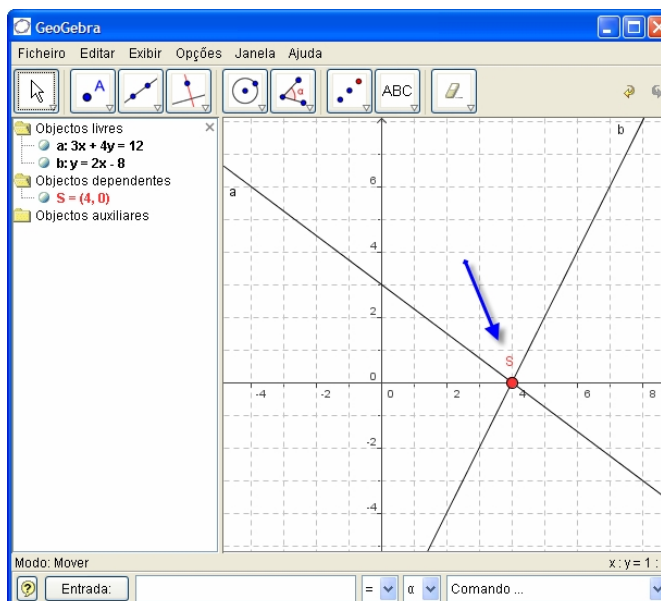


Pode-se modificar tanto a equação (Clique com o botão do lado direito, **editar**) como deslocar recta com o *rato*.

## 2.6. Tangente à curva representativa de uma função

*GeoGebra* tem um comando que permitir traçar a *tangente* ao gráfico de uma função  $f$  num ponto de abcissa  $x = a$ .

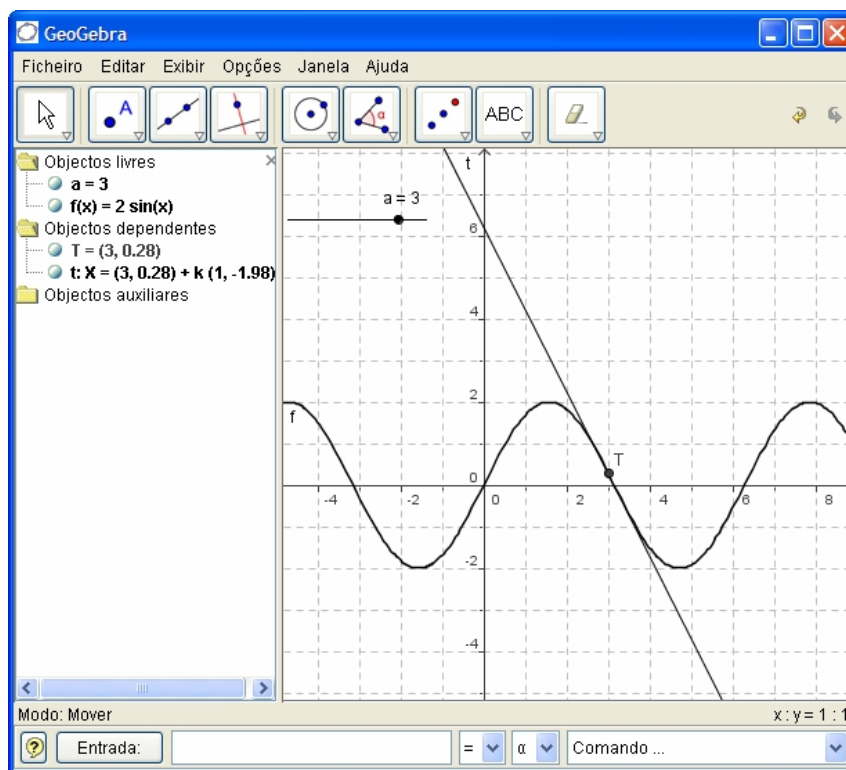
$$\begin{aligned} a &= 3 \\ f(x) &= 2 * \sin(x) \\ t &= \text{tangente}[a,f] \end{aligned}$$



Ao animar o ponto (ver 4.1.2) a *recta tangente* desloca-se ao longo do gráfico da função  $f$

Outro modo de fazê-lo:

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ f(x) &= 2 \cdot \sin(x) \\ T &= (a, f(a)) \\ t: X &= T + k \cdot (1, f'(a)) \end{aligned}$$



É possível também definir geometricamente a tangente ao gráfico de uma função da seguinte maneira:

- Definimos um Ponto através da opção *Novo Ponto* (ver 3.2) e damos um clique sobre a curva representativa da função  $f$  ;
- Seleccionamos a opção **Tangentes** e damos um clique na **curva** e em seguida no **ponto** que criamos previamente.

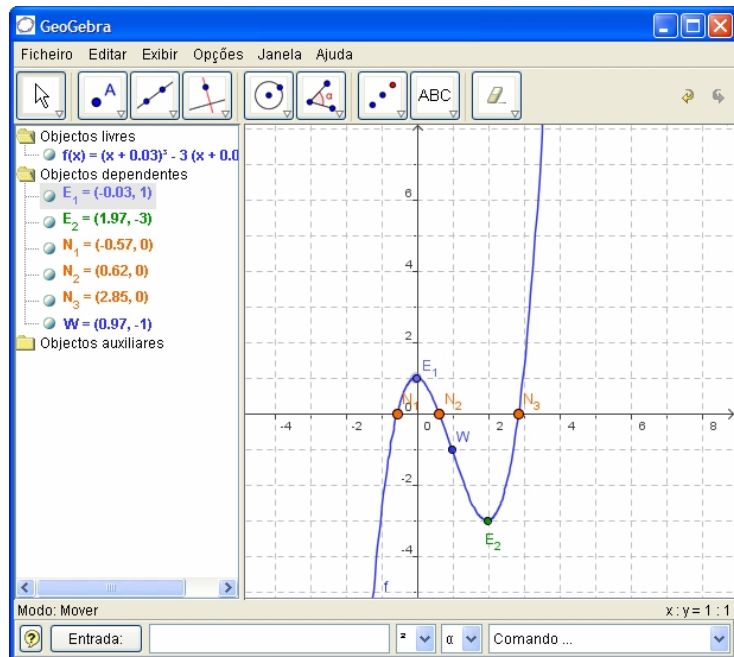
De seguida, seleccionamos a opção **Mover** e arrastamos o ponto ao longo do gráfico da função com o *rato*. A *recta tangente*, também se modifica dinamicamente.

## 2.7. Exploração de funções polinomiais

Com o GeoGebra podemos explorar *raízes*, *extremos* e *pontos de inflexão* de funções polinomiais.

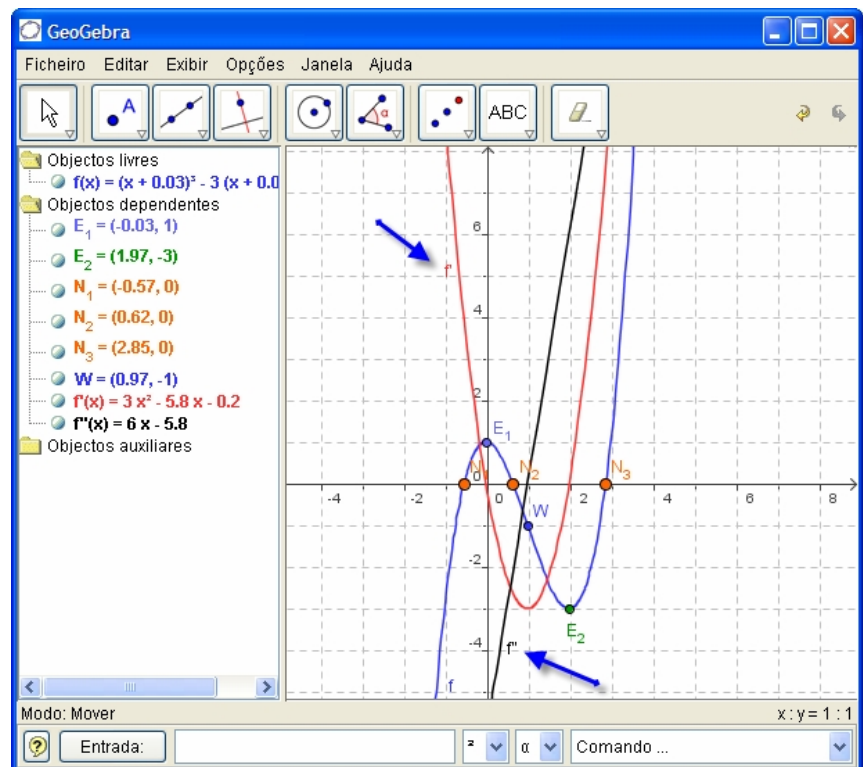
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

N = raiz [f]  
 E = extremo [f]  
 W = pontodeinflexão [f]



Na opção **Mover** podemos arrastar a função  $f$  com o *rato*. Nesse contexto, a primeira e a segunda derivada  $f'$  são também interessantes:

Derivada [f]  
 Derivada [f , 2]



## 2.8. Integrais

Nos integrais o *GeoGebra* permite a possibilidade de visualizar como rectângulos, as somas inferior e superior de uma função.

$$f(x) = x^{1/2} + 2$$

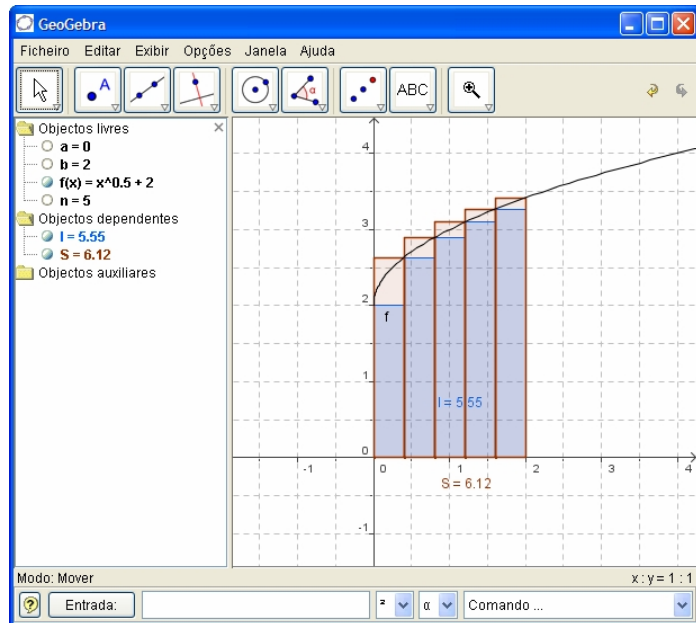
$$a = 0$$

$$b = 2$$

$$n = 5$$

$$I = \text{somainferior}[f, a, b, n]$$

$$S = \text{somasuperior}[f, a, b, n]$$



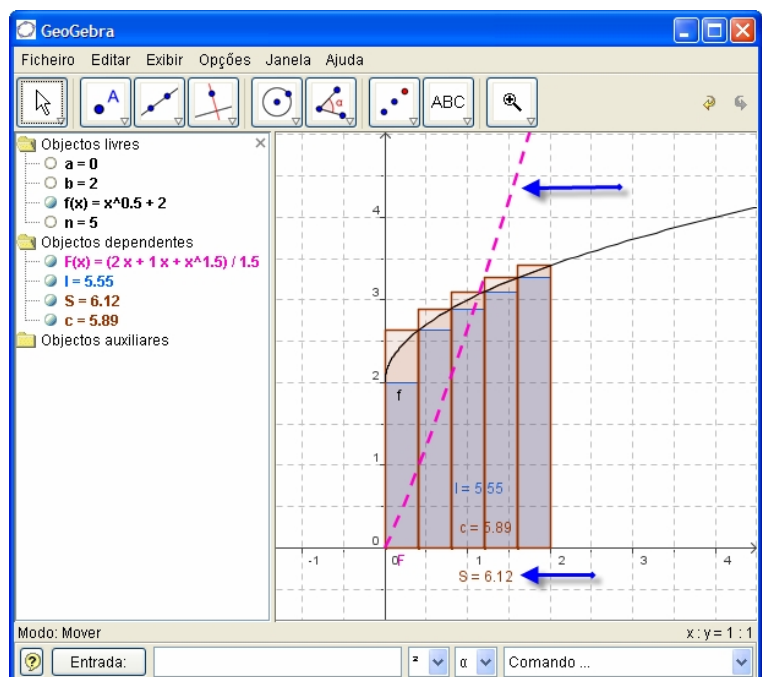
Alterando  $a, b$  ou  $n$  (**animação**, ver 4.1.2); **slider** ou **selector**, (3.2.10) pode-se evidenciar a influência destes parâmetros. Para o incremento de  $n$  poder-se-ia seleccionar 1 (dando um clique com o botão direito sobre  $n$ , **propriedades**).

O integral definido pode calcular-se como se indica a seguir:

$$\text{integral}[f, a, b]$$

A **Função Primitiva**  $F$  pode ser criado da seguinte forma:

$$F = \text{Integral}[f]$$



# Capítulo 3

## Janela de desenho ou janela geométrica

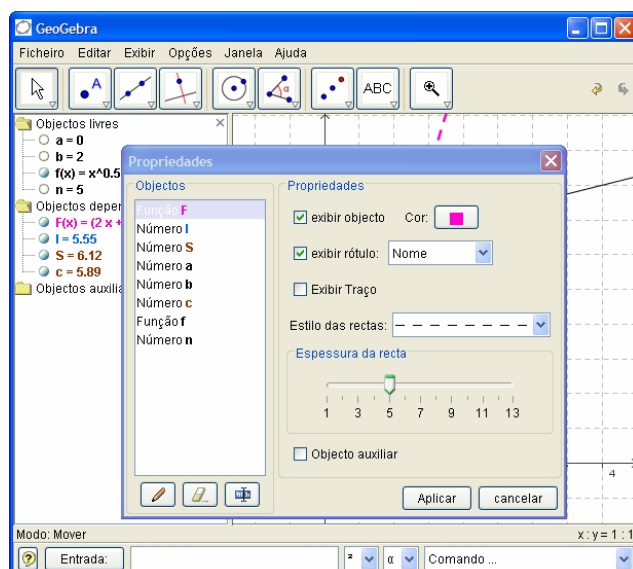
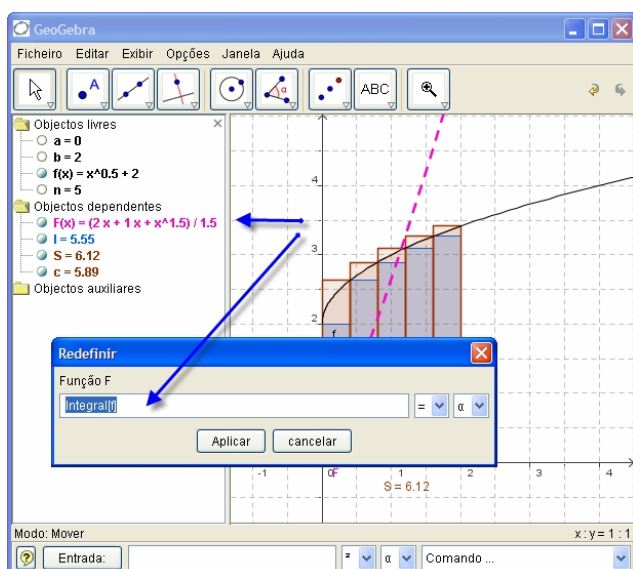
Vamos agora explicar como utilizar o *rato* com *GeoGebra*.

### 3.1. Notas gerais

A *janela de gráficos* (a da direita) mostra os pontos, vectores, segmentos, polígonos, funções, rectas e cónicas graficamente. Quando o *rato* se desloca sobre um objecto aparece a sua descrição. A *janela de gráficos* denomina-se *zona gráfica* em determinado tipo de situações.

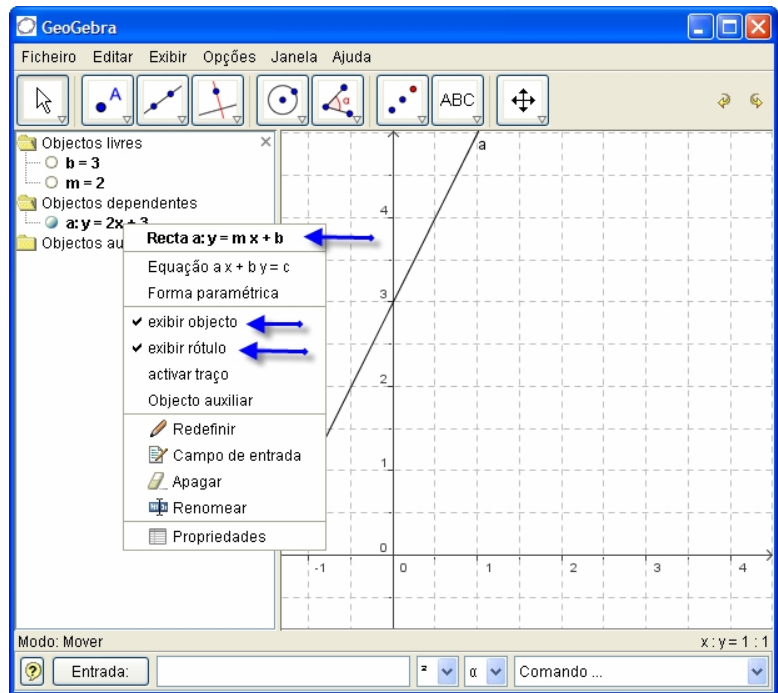
Há vários modos de “dizer” ao *GeoGebra* como reagir a cada entrada do *rato* (Novo ponto, intersecção, circunferência definida por três pontos, ...). Estas questões explicar-se-ão detalhadamente mais à frente (3.2).

Ao *dar um clique* sobre um objecto na *janela algébrica* abre-se um menu que permite alterar determinadas propriedades do objecto. Se dermos um *duplo clique* sobre um objecto na *janela de desenho ou gráfica* surge um menu que permite também alterar as propriedades desse objecto (por exemplo a *cor*, a *espessura*, do gráfico de uma função). Ao *dar um clique duplo* sobre um objecto na *janela de álgebra* surge uma janela para redefinir o comando.

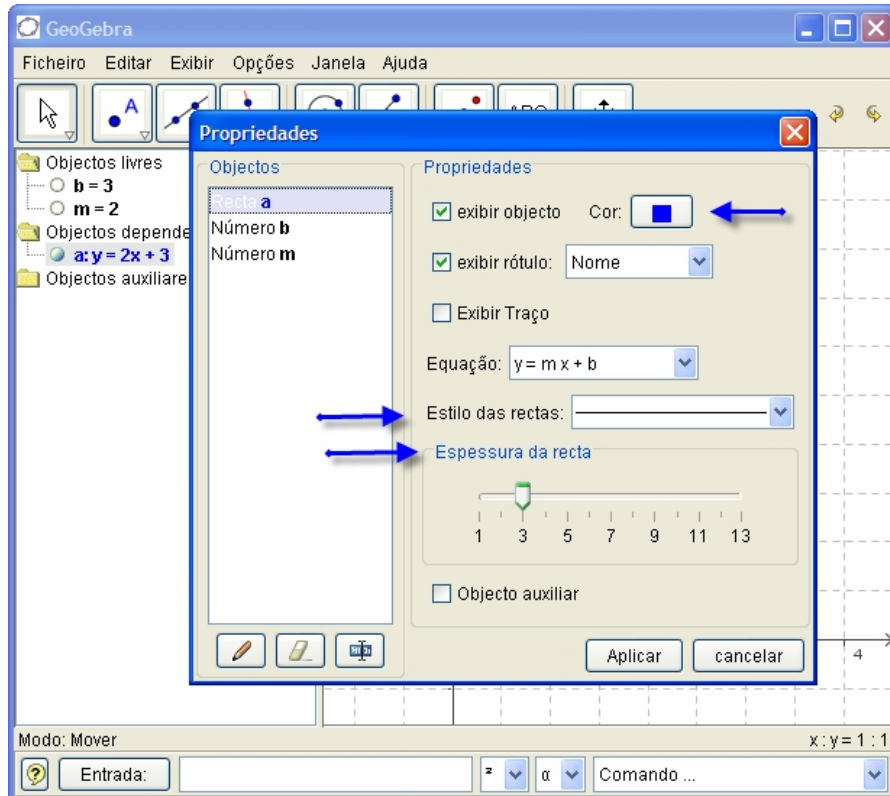


### 3.1.1. Menu de contexto

Ao accionar a tecla direita do rato sobre um objecto, surge um menu de contexto donde se pode seleccionar la notação algébrica (coordenadas polares ou cartesianas, equações implícitas ou explícitas,...). Aqui também se pode aceder aos comandos como **Editar**, **Redefinir**, ....



Ao **seleccionar Propriedades** surge uma caixa de diálogo, onde se podem modificar a cor, medida, grossura do traço, o estilo, sombreado, etc.



### 3.1.2. Mostrar e Esconder

Os objectos geométricos podem ser visíveis (exibir) ou não (**oculta**). Pode empregar-se a opção **Exibir/Ocultar Objecto** (3.2.1) no menu de contexto (3.1.1) para alternar entre as duas opções. O ícone esquerdo de cada objecto na *janela algébrica*, informa sobre o seu actual estado de visibilidade.

### 3.1.3. Traço

É possível fazer com que os objectos geométricos deixem um rasto (traço) à medida que se desloca no desenho. Utiliza-se o menu contexto (3.1.1) para (des)activar esse “traço”. A opção **Actualizar janelas (Ctrl+F)** do menu **Exibir** elimina todos os rastros (traços).

### 3.1.4. Zoom

Ao accionar a tecla direita sobre a zona gráfica, destaca-se um menu de contexto que permite uma aproximação ou afastamento do “zoom”.

Para conhecer outros detalhes pode consultar **Zoom de Aproximação** (3.2.1) assim como **Zoom de afastamento**.

**Rectângulo de zoom:** com um clique do botão direito do rato, ao arrastá-lo, desloca-se o ponteiro para fazer um *zoom* de uma zona.

### 3.1.5. Relação entre Eixos

Ao dar um clique com o botão do lado direito sobre la zona gráfica destaca-se um menu de contexto a partir do qual se pode *modificar alterar a escala* para os eixos dos *xx* e dos *yy*.

### 3.1.6. Protocolo de Construção

O protocolo de construção interactiva (menu **Exibir**) é uma tabela que mostra todas as etapas de construção. Aqui pode refazer-se uma construção passo a passo. Inclusive é possível intercalar passos de construção e modificar a sua ordem. O menu de ajuda do protocolo de construção oferece uma explicação mais detalhada.

### 3.1.7. Refazer (Ctrl+Y)

Um objecto pode ser *redefinido* utilizando o seu menu de contexto (3.1.1). Este é muito útil para introduzir alterações na sua construção. Também pode abrir-se a caixa de diálogo com que se *redefine*, dando um, clique duplo sobre um objecto dependente.

Para colocar um ponto livre **A** sobre uma recta  $h$ , insere-se:

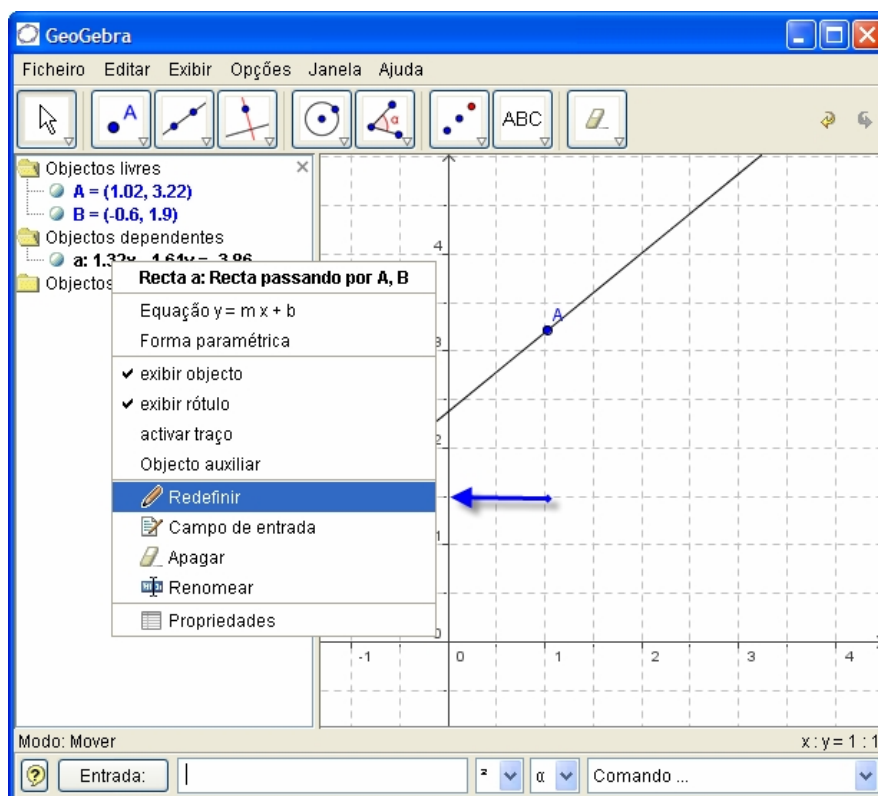
#### Ponto[h]

Para eliminar o ponto desta recta e "libertá-lo" novamente, redefine-se o ponto de coordenadas livres como (3,2).

Outro exemplo é a alteração de uma recta  $h$  que passa pelos pontos A e B num segmento que tem-nos como extremos: Com o botão do lado direito dá-se um **clique** para abrir o menu de contexto, escolhe-se a opção **Redefinir** e introduz-se:

#### Segmento[A,B].

A ferramenta que permite a redefinição de objectos é muito versátil para uma modificação retrospectiva do que foi construído. Convém recordar que de este modo também é possível mudar a ordem das etapas de construção dentro do protocolo de construção. (3.1.6).





## 3.2. Opções

As seguintes opções podem activar-se na barra de menus. É necessário *dar um clique* sobre a seta à direita do ícone para passar às outras opções desse menu.

Marca-se um objecto quando se *dá um clique* sobre este com o *rato*. Em qualquer opção de construção podem-se criar facilmente novos pontos, simplesmente dando *um clique* sobre a *área de desenho ou gráfica*.

### 3.2.1. Opções Gerais



Para arrastar e soltar objectos livres com o rato.

Seleccção de um objecto dando um duplo clique na opção de **Mover** para poder

- *Eliminar accionando a tecla **Del***
- *Deslocá-lo através das teclas de movimento de curso r(ver 4.1.2)*

Para seleccionar vários objectos, deve-se manter accionada a tecla **Ctrl**.



Selecciona-se em primeiro lugar o ponto que será o *centro de rotação*. A seguir podem-se rodar objectos livres em volta deste ponto, simplesmente arrastando-os com o *rato*.



Para marcar um par de objectos e obter informação sobre as suas relações (4.3.1).



Para arrastar e soltar a *área gráfica* e deslocar a origem do referencial também se pode deslocar a *área gráfica* accionando a tecla **Ctrl** e arrastando-a com o *rato*.

### **Zoom de Aproximação**



Pode dar-se *um clique* sobre qualquer ponto da zona gráfica para produzir um "zoom" de aproximação (**zoom in**) (ver 3.1.4).

### **Zoom de Afastamento**



Pode dar-se *um clique* sobre qualquer ponto da zona gráfica para produzir um "zoom" de afastamento (**zoom out**) (ver 3.1.4).

### **Exibir / Ocultar objecto**



Ao dar *um clique* sobre um objecto permite exibir/ocultar respectivamente. Todos os objectos que estão ocultos são exibidos. Estas mudanças têm efeito quanto se passa a qualquer outra opção na barra correspondente.

### **Exibir / Ocultar rótulo**



Ao dar *um clique* sobre um objecto permite exibir/ocultar respectivamente.

### **Copiar estilo visual**



Esta opção permite copiar as propriedades visuais como *cor, dimensão, estilo da linha, espessura*, etc., de um objecto para outro(s)

Em primeiro lugar, deve seleccionar o objecto cujas propriedades deseja copiar-se. A seguir dá-se *um clique* sobre todos os outros que devem adoptar essas propriedades.

### **Elimina objecto**



Basta dar *um clique* sobre qualquer objecto que se deseja eliminar.

### 3.2.2. Ponto

**Novo ponto**



Ao dar *um clique* sobre a *zona gráfica* ou *de desenho* cria-se um novo ponto. As suas coordenadas ficam estabelecidas ao largar o botão do *rato* novamente.

Ao dar *um clique* sobre um segmento, recta ou cónica cria-se um ponto sobre o objecto em causa. Ao dar *um clique* sobre a intersecção de dois objectos cria-se o ponto de intersecção.

**Intersecção de dois objectos**



Os pontos de intersecção de dois objectos podem determinar-se de duas maneiras:

- a) Marcar dois objectos: determinam-se todos os pontos de intersecção (se for possível)
- b) Ao dar um clique sobre a intersecção de dois objectos: só se cria este único ponto de intersecção.

Para segmentos, semi-rectas ou arcos pode especificar-se se deseja *permitir a intersecção de pontos periféricos* (propriedades, 3.1.1). Este pode utilizar-se para conseguir a intersecção de pontos que fazem parte do prolongamento de um objecto. Por exemplo, o prolongamento de um segmento ou uma semi-recta é uma recta.

**Ponto Médio**



Dar um clique sobre :

1. dois pontos para obter o seu ponto médio.
2. um segmento de recta para obter o seu ponto médio.
3. uma cónica para obter seu ponto central.

### 3.2.3. Vector

**Vector entre dois pontos**



Marca o ponto que defina a origem e o ponto que define a extremidade do vector.

### Vector definido a partir de um ponto



Ao marcar um ponto A e um vector  $\vec{v}$  cria-se um ponto  $B = A + \vec{v}$  e o vector de A até B.

### 3.2.4. Segmento de recta

#### Segmento de recta entre dois pontos



Ao marcar dois pontos A e B estabelece-se um segmento de recta entre A e B. Na *janela algébrica* poderá ver-se o comprimento do segmento de recta.

#### Segmento de recta com um dado comprimento a partir de um ponto



Ao dar *um clique* sobre um ponto A que é um dos extremos do segmento e especificar o comprimento desejado surge a janela que permite inserir o respectivo comprimento do segmento de recta.

Deste modo se criará um segmento de recta com um comprimento fixo entre o ponto A e o ponto B que será o seu outro extremo. O extremo B pode rodar-se ma opção **Girar em torno de um ponto** do extremo inicial A.

### 3.2.5. Semi-recta

#### Semi-recta dados dois pontos



Ao marcar dois pontos A e B cria-se uma semi-recta que parte de A (origem) e passa por B. Na *janela algébrica* pode-se ver a equação correspondente da recta suporte .

### 3.2.6. Polígono

#### Polígono



Permite definir um polígono através dos seus vértices. Depois de dar um clique no primeiro ponto e de fazer o mesmo para os outros deve no final fechar o polígono dando *um clique* novamente no primeiro, Poderá ver na *janela algébrica* a área do polígono.

### 3.2.7. Recta

#### Recta entre dois pontos



Ao marcar dois pontos A e B fixa-se a recta definida pelos A e B. O vector director da recta é o vector  $(B - A)$ .

#### Recta Paralela



Ao seleccionar uma recta  $g$  e um ponto A, fica definida a recta que passa por A e é paralela a  $g$ . A direcção desta recta é a direcção da recta  $g$ .

#### Recta Perpendicular



Ao seleccionar uma recta  $g$  e um ponto A, fica definida a recta que passa por A e é perpendicular a  $g$ . o vector director desta recta é um vector perpendicular ao vector director da recta  $g$ .

#### Mediatriz



A mediatriz de um segmento de recta define-se dando *um clique* sobre o segmento de recta.

#### Bissectriz



A bissectriz de um ângulo pode definir-se de duas maneiras:

- Ao marcar os três pontos A, B, C define-se a bissectriz do ângulo determinado por A, B e C, com B como vértice.
- Ao marcar duas rectas definem-se as bissectrizes dos seus ângulos.

## Tangentes

As tangentes a uma cónica podem determinar-se de duas maneiras:

- Ao marcar um ponto **A** e uma cónica  $c$  definem-se todas as tangentes a  $c$  que passam por **A**.
- Ao marcar uma recta  $g$  e uma cónica  $c$  definem-se todas as tangentes a  $c$  que são paralelas a  $g$ .

Ao marcar o ponto  $A$  e a função  $f$  define-se a recta tangente a  $f$  para  $x = x(A)$

## Recta Polar

Esta opção cria a recta polar de uma cónica:

- Marca-se um ponto e uma cónica para estabelecer a recta polar.
- Marca-se uma recta o vector e uma cónica para fixar o seu diâmetro.

## 3.2.8. Cónica

### Circunferência dado o seu centro e um dos seus pontos

Ao marcar um ponto  $M$  e um ponto  $P$  fica definida uma circunferência com centro em  $M$  que passa por  $P$ . O raio do círculo é a igual a  $\overline{MP}$ .

### Circunferência conhecidos o seu centro e radio

Após marcar um ponto  $M$  como centro, surge uma janela para introduzir o valor do raio.

### Circunferência dada três dos seus pontos

Ao marcar três pontos  $A, B, C$  fica definida uma circunferência que passa por esses pontos. Se os três pontos pertencem a uma recta, a circunferência confunde-se com a recta.

## Cónica dados cinco dos seus pontos

Ao marcar cinco pontos fica definida uma cónica que passa por eles. Sempre que quatro pontos não forem colineares a cónica fica efectivamente definida.

### 3.2.9. Arco e sector

O valor algébrico de um arco é o seu comprimento, o valor de um sector é a sua área.

#### Semicircunferência



Ao marcar dois pontos A e B define-se uma semicircunferência por cima do segmento [AB].  
Arco circular dado um centro e seus dois pontos extremos.

#### Sector circular dado um centro e dois pontos extremos



Ao marcar três pontos M, A e B define-se um sector circular com centro em M, que tem como extremo inicial A e finaliza em B. *Nota: o ponto B não tem que fazer parte necessariamente parte do arco de circunferência.*

#### Arco de circunferência que contém três pontos



Ao marcar três pontos define-se um arco de circunferência que passa pelos três pontos.

#### Sector circular definido por três pontos



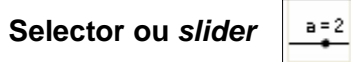
Ao marcar três pontos define-se um sector circular que passa por dois pontos.

### 3.2.10. Número e Ângulo



Esta opção define a distância entre . . .

- a) dois pontos
- b) dois rectas
- c) um ponto e uma recta



Ao dar *um clique* sobre qualquer lugar livre da *zona gráfica*, cria-se um selector para ajustar o valor de um número ou ângulo. A janela que surge permite especificar o intervalo [mín, máx] do número ou ângulo.

No *GeoGebra* um selector não é senão a representação gráfica de um número ou ângulo parametrizável. Pode criar-se facilmente um selector correspondente a um número ou ângulo existentes, simplesmente apontando para este objecto (com um clique do botão direito do rato e escolhendo **exibir objecto**

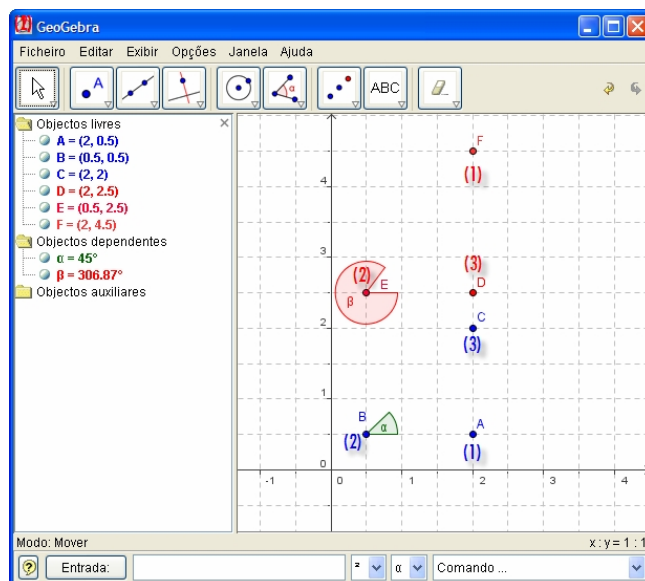
A posição de um selector pode ser absoluta em relação a janela ou relativa ao sistema de coordenadas (ver propriedades do número ou ângulo correspondentes, 3.1.1).



Esta opção permite criar

- a) o ângulo definido por três pontos;
- b) o ângulo definido por dois segmentos;
- c) o ângulo entre duas rectas;
- d) o ângulo entre dois vectores;
- e) todos os ângulos internos de um polígono.

A amplitude do ângulo depende da ordem de selecção dos três pontos. Não esquecer que o ponto intermédio é o vértice do ângulo. (experiência várias situações...)





### 3.2.11. Locus - Lugar Geométrico

#### Locus

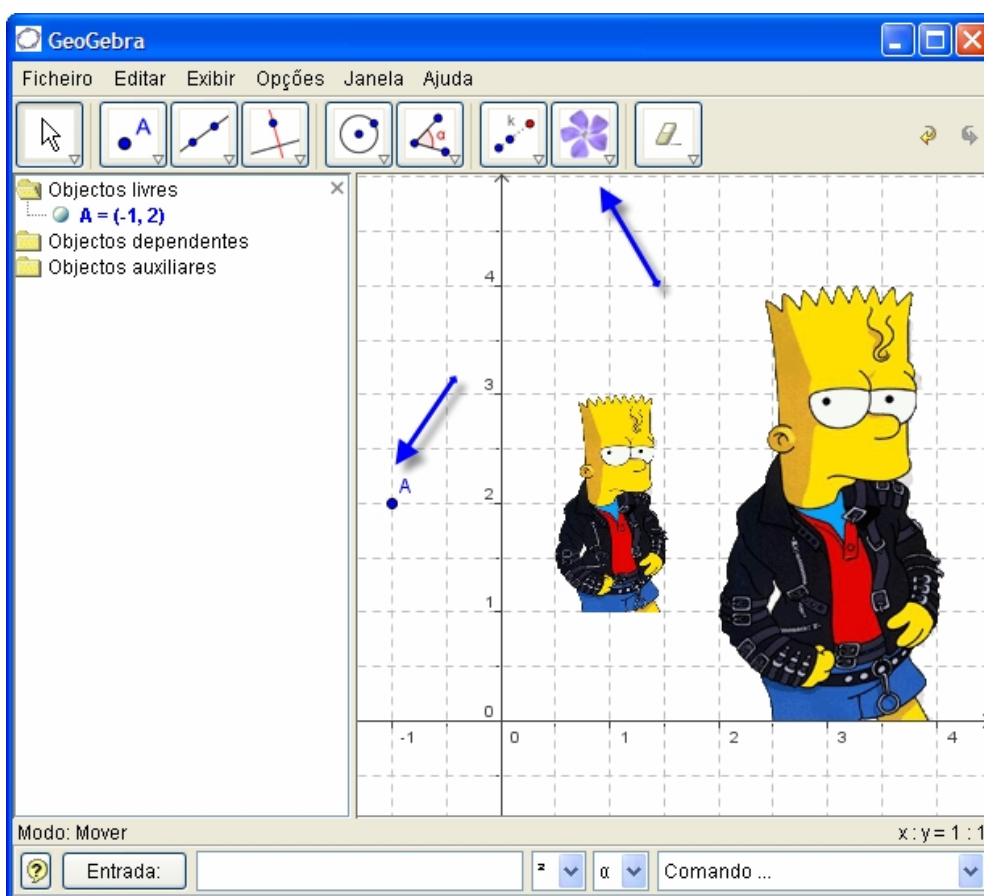
Deve seleccionar em primeiro lugar o ponto A cujo lugar geométrico pretende desenhar. Depois com um clique seleccione um ponto P(ponto Móvel) de que depende o ponto A . Atenção: O ponto P deve pertencer a um objecto (recta, segmento, circunferência,...).

### 3.2.12. Transformações Geométricas

As seguintes transformacionais geométricas operam sobre pontos, rectas, cónicas, polígonos e imagens.

#### Homotetia/dilatação de um objecto com centro num ponto

Primeiro deve seleccionar o objecto que vai sofrer a homotetia (ampliação  $r > 1$  ou redução  $0 < r < 1$ ). Depois, com *um clique* selecciona-se o ponto que será o centro da homotetia. Aparecerá, então, uma janela onde deve especificar o factor  $r$  da homotetia.



### 3.2.13. Texto

#### Texto

Nesta opção pode criar textos ou fórmulas em LATEX.

- a) Ao dar *um clique* sobre a área gráfica cria um novo texto nessa posição.
- b) Ao dar *um clique* sobre um ponto texto cuja ligação o vincula e associa a esse ponto.

Aparece uma caixa de diálogo onde pode introduzir texto. Também se pode usar valores de objectos e desta maneira, criar textos dinâmicos.

Entrada	Descrição
"Isto é um texto"	texto simples
"Ponto A = " + A	texto dinâmico utilizando o valor do ponto A
"a = " + a + "cm"	texto dinâmico utilizando o valor de um segmento a

A posição de um texto pode ser absoluta - no documento - ou relativa em relação ao sistema de coordenadas (para mais detalhes pode consultar sobre esta propriedade do texto, 3.1.1).

### 3.2.14. Imagens

Esta opção permite inserir uma imagem na zona de gráficos ou de desenho.

- a) O primeiro *clique* sobre la zona gráfica determina o vértice inferior esquerdo da imagem.
- b) O primeiro *clique* sobre um ponto determina que este será o vértice inferior esquerdo da imagem.

A seguir, surge uma caixa de diálogo para a abertura de um ficheiro, para seleccionar a imagem.

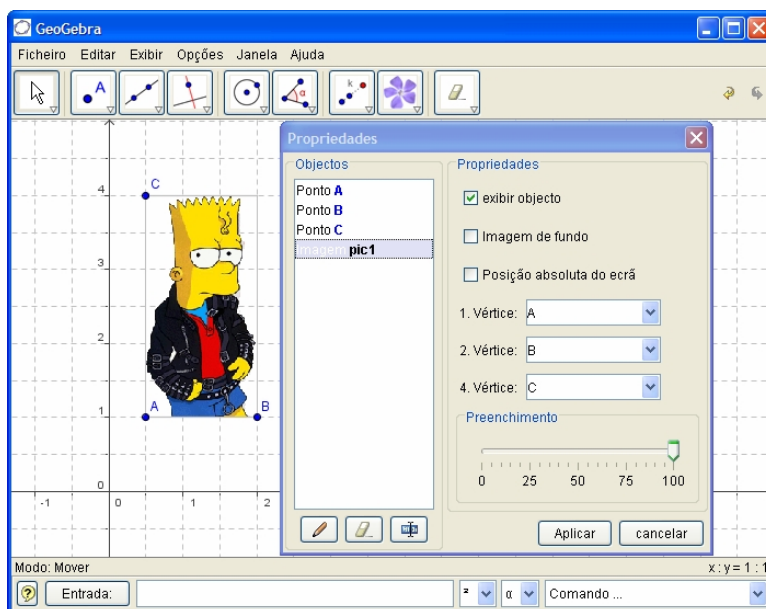
## 3.2.15. Propriedades de Imagens

### Posição

A posição de uma imagem pode ser absoluta – na janela - ou relativa em relação ao sistema de coordenadas (Para más detalhes pode consultar propriedades da imagem, 3.1.1). Veremos à frente que especificando os três pontos oferece-se a flexibilidade de aumentar, rodar e até distorcer as imagens.

1. Vértice: posição de vértice esquerdo inferior da imagem;
2. Vértice (inferior direito): só pode fixar-se quando já se estabeleceu a alínea 1. Vértice. Passa a controlar a largura da imagem;
3. Vértice (superior esquerdo): Passa a controlar a altura da imagem.

Para explorar os efeitos dos pontos, convém criar três pontos A, B e C. Selecione A como o primeiro e B como o segundo vértice da imagem. Ao arrastar A e B na opção **Mover** pode explorar a sua influência facilmente. Dá-se um *clique duplo* sobre a imagem e depois podemos seleccionar, a seguir, A como o primeiro e C como o terceiro vértice. Finalmente, pode estabelecer os três pontos e observar que ao arrastá-los, se deforma a imagem.



Depois de observar como alterar a posição e tamanho de uma imagem, vale a pena experimentar outras alternativas. Ao juntar uma imagem a um ponto A, fixa-se 3 unidades para a sua largura e 4 para a sua altura, como se pode ver:

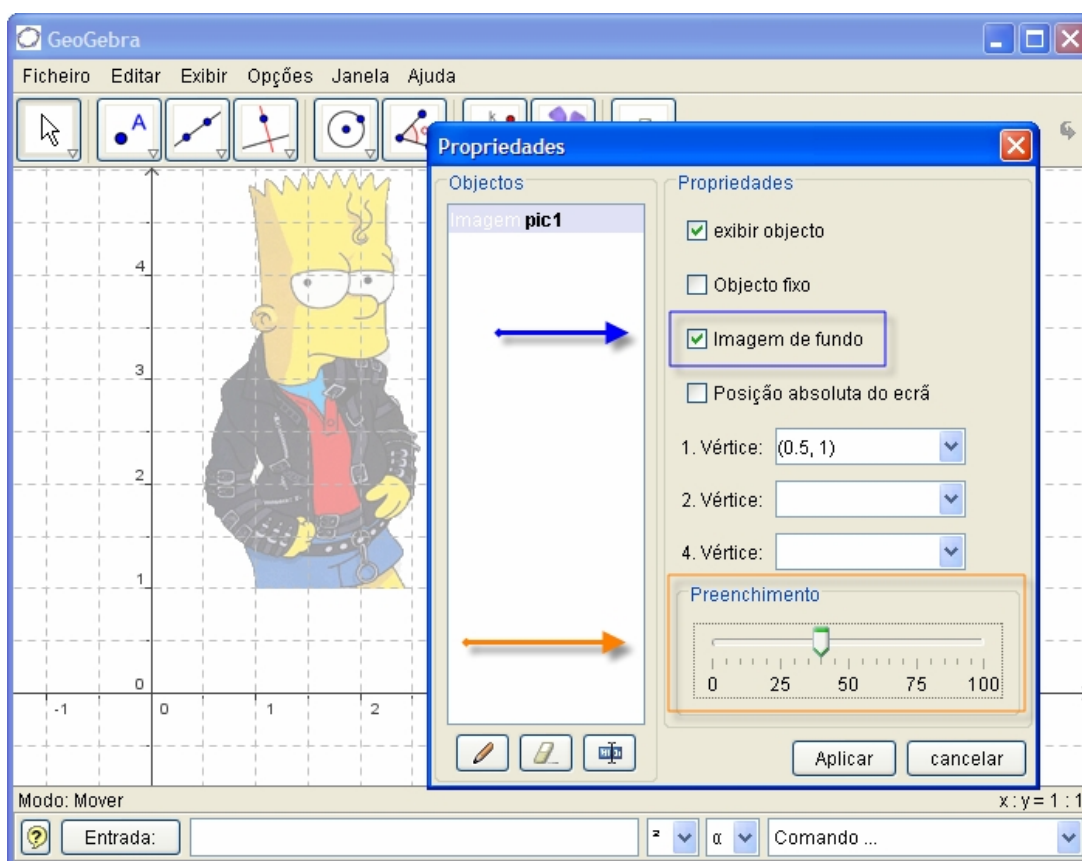
- 1. Vértice: A
- 2. Vértice: A + (3,0)
- 3. Vértice: A + (0,4)

Ao arrastar o ponto A através da opção **Mover**, a imagem conserva a medida desejada. Para mais informação, ver o comando **Extremo** (4.3.13).

## Imagem de Fundo

Pode definir uma imagem de *fundo*... que se fixa ao fundo da *janela gráfica*. Ver propriedades da imagem 3.1.1). Uma imagem de fundo, fica atrás do sistema de eixos e já não estará acessível através *do rato*.

Para modificar a condição de "Imagem de fundo" de uma imagem, deve mudar as suas **Propriedades** desde a opção do menu **Editar**.



## Transparência

Uma imagem pode ser transparente para que se poder ver tanto outras imagens como os eixos. Para fixar esta condição de transparência de uma imagem, especifica-se um valor entre 0% e 100% para o valor de preenchimento (propriedades da imagem, 3.1.1).

# Capítulo 4

## Entrada de Comandos

Passaremos agora a explicar como introduzir pelo teclado comandos no *GeoGebra*.

### 4.1. Notas Gerais

Valores, coordenadas e equações de objectos *livres* e *dependentes* surgem na janela algébrica (lado esquerdo). Os objectos livres não dependem de nenhum outro objecto e podem ser modificados directamente.

A entrada pode realizar-se no *campo de texto/linha de comandos*. Isto explicar-se-á mais à frente, detalhadamente (4.2 e 4.3).

#### 4.1.1. Modificação de valores

Os objectos livres podem ser modificados mas os dependentes, não. Para alterar o valor de um objecto livre, basta reescrevê-lo, digitando o novo valor na *linha de comandos* (4.2).

Como alternativa, pode fazer na *janela algébrica*, optando por **Editar** no menu de contexto (3.1.1).

#### 4.1.2. Animação

Para modificar de forma contínua um número ou ângulo, seleccionamos a opção **Mover** (3.2.1), e damos *um clique* sobre o número ou ângulo e accionamos a tecla + ou -.

Produz-se um efeito de animação se mantivermos pressionada permanentemente, uma das teclas. Por exemplo, se as coordenadas de um ponto dependem de um número  $k$  como por exemplo  $P=(2k,k)$ , o ponto desloca-se ao longo de uma recta quando  $k$  se modifica continuamente.

Com as teclas de movimento de cursor podemos deslocar qualquer objecto livre, no opção **Mover**. O incremento é ajustável e fixa-se na caixa de diálogo das propriedades (3.1.1).

Ctrl + tecla de movimento de cursor ... 10 X incremento do passo
Alt + tecla de movimento de cursor ... 100 X incremento do passo

Pode-se mover qualquer ponto de uma recta, utilizando a tecla + u a tecla -.

## 4.2. Entrada Directa

*GeoGebra* pode operar com números, ângulos, pontos, vectores, segmentos, rectas e cónicas. Explicaremos como podemos introduzir estes objectos através de coordenadas ou equações.

Também se podem utilizar índices com os nomes dos objectos:

$A_1$ resp. $S_{AB}$ Introduz-se da seguinte forma: $A_1$ resp. $s_{AB}$ .
--

### 4.2.1. Números e ângulos

Os números e ângulos utilizam o ponto decimal

número  $r$  |  $r = 5.32$  e não  $5,32$

Os ângulos introduzem-se em graus ou radianos (rad). A constante pi (ou  $\pi$ ) é útil para los valores em radianos.

*GeoGebra* realiza todos os cálculos internos em radianos. El símbolo  $^\circ$  no é senão uma constante para converter graus em radianos.

Ângulo alfa	graus $60^\circ$	Radianos $\text{Pi}/3$
-------------	---------------------	---------------------------

#### Selectores e Teclas de movimento de cursor

Tanto os números como os ângulos livres podem definir-se como selectores ajustáveis sobre a *zona gráfica* (ver 3.2.10). Com as teclas de movimento de cursor pode mudar o valor de números e ângulos, também na *janela algébrica* (ver 4.1.2).

#### Valor limite no intervalo

Tanto os números livres como os ângulos podem limitar-se a um intervalo [mín, máx] (propriedades, 3.1.1). Este intervalo utilize-se também para os selectores (consultar 3.2.10).

Para cada ângulo dependente pode-se especificar é permitida a definição de ângulos com amplitude superior a 180 graus ou não (*ângulo de reflexão*) (propriedades, 3.1.1).

## 4.2.2. Pontos e Vectores

Os pontos e vectores podem introduzir-se através das coordenadas cartesianas ou polares (4.2.1). As **letras maiúsculas definem os pontos** e as **minúsculas os vectores**

	Coordenadas cartesianas	Coordenadas polares
Ponto A	$A = ( 1, 0 )$	$A = ( 1; 0^\circ )$
Vector v	$v = ( 0, 5 )$	$v = ( 5 ; 90^\circ )$

## 4.2.3. Recta

Uma recta introduz-se como uma equação linear em  $x$  e  $y$  ou na forma vectorial. Nos dois casos, podem utilizar variáveis previamente definidas (números, pontos, vectores). O nome da recta deve ser introduzido no início da entrada, seguido de dois pontos.

	Equação cartesiana	Equação vectorial
Recta g	$g : 3x + 4y = 2$	$g : X = (-5, 5) + k * (4, -3)$

Seja  $k = 2$  e  $d = -1$  por exemplo. Então, podemos definir uma recta  $g$  introduzindo a equação:  $g : k * x + d$

### Eixo dos $xx$ (xAxis) e eixo dos $yy$ (yAxis)

Aos dois eixos coordenados podemos aceder com os comandos correspondentes através de respectivamente xAxis e **Axis**. Por exemplo, o comando **Perpendicular[A,xAxis]** define a recta perpendicular ao eixo dos  $xx$  que passa pelo ponto A.

#### 4.2.4. Cónica

Uma cónica introduz-se como uma equação quadrática em  $x$  e  $y$ . Pode-se utilizar variáveis previamente definidas (números, pontos, vectores). O nome da cónica deve ser introduzido no início seguido de dois pontos.

Elipse eli	eli : $9x^2 + 16y^2 = 144$
Hipérbole hip	hip : $9x^2 - 16y^2 = 144$
Parábola par	par : $y^2 = 4x$
Circunferência k1	k1 : $x^2 + y^2 = 25$
Circunferência k2	k1 : $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$

Sejam  $a=4$  e  $b=3$  por exemplo. Agora podemos introduzir uma elipse como:

$$\text{eli} : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

#### 4.2.5. Função

Para introduzir uma função podemos utilizar variáveis previamente definidas (números, pontos, vectores, . .) e outras funções.

	Entrada
Função $f$	$f(x) = 3x^3 - x^2$
Função $g$	$g(x) = \tan(f(x))$

Todas as funções internas (como *seno*, *coseno*, *tangente* - *sin*, *cos*, *tan* - etc.) são descritas na secção dedicada a operações aritméticas (4.2.6).



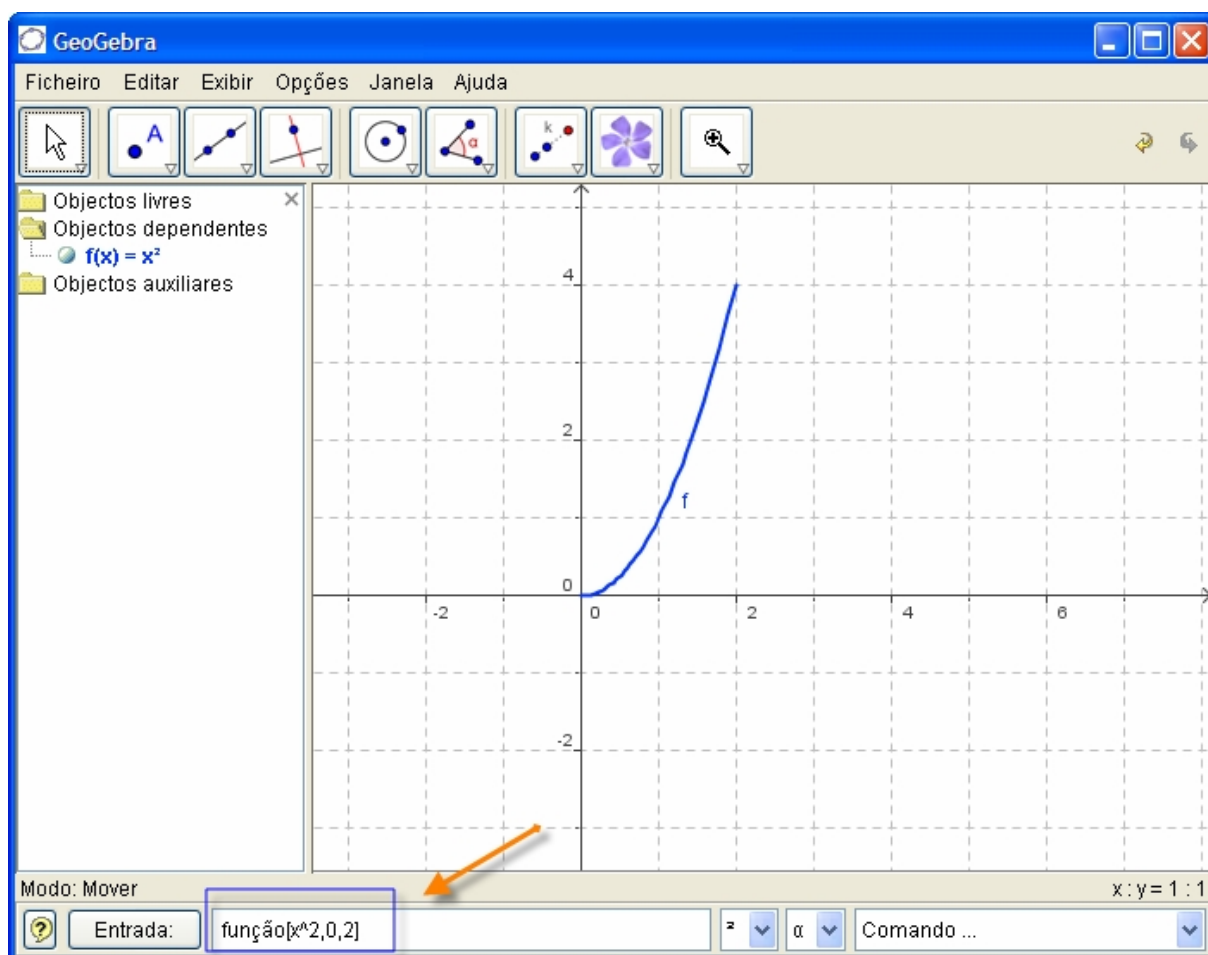
Existem comandos para obter *integrals* (4.3.11) e *derivadas* (4.3.11) de uma função. Também pode utilizar-se  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$ , . . . para as derivadas de uma função  $f$  previamente definida.

As funções podem sofrer uma translação associada a um vector (4.3.15) e uma *função livre* pode deslocar-se com o rato.

### Função definida num dado Intervalo

Para definir uma função num intervalo  $[a, b]$ , deve utilizar-se o comando **Função** (ver 4.3.11)

*Função*[ $x^2, 0, 2$ ] (por exemplo)



## 4.2.6. Operações Aritméticas

Para introduzir números, coordenadas ou equações (4.2) podem-se utilizar expressões aritméticas com parêntesis. As seguintes operações estão disponíveis:

Operação	Introduzir
Soma	+
Diferença	-
Multiplicação, Produto escalar	*
Divisão	/
Potenciação	^
Factorial	!
Função gama	Gamma()
Parêntesis	()
Coordenada x	x()
Coordenada y	y()
Valor absoluto	abs()
Sinal	sign()
Raiz quadrada	sqrt()
Função exponencial	exp()
Logaritmo natural	log()
Seno	sin()
Co-seno	cos()
Tangente	tan()
Arco-coseno	acos()
Arco-seno	asen()
Arco tangente	atan()
Co-seno hiperbólico	cosh()
Seno hiperbólico	sinh()
Arco coseno hiperbólico	acosh()
Arco seno hiperbólico	asinh()
Arco tangente hiperbólico	atanh()
Maior número interior menor ou igual a	floor()
Arredondamento	Round()
Menor número interior maior ou igual a	ceil()

Por exemplo, o ponto médio  $M$  de dois pontos  $A$  y  $B$  pode ser determinado, introduzindo:

A *norma* de um vector  $\vec{v}$  pode ser determinada usando  $normav = \text{sqrt}(v * v)$

Podemos ver que se podem fazer cálculos com pontos e vectores assim como no *GeoGebra*.

## 4.3. Comandos

Com a ajuda dos comandos podemos criar novos objectos ou modificar os existentes. A intersecção de duas rectas  $g$  e  $h$  produz um novo ponto, por exemplo:

**S=Intersecção[g,h]** (4.3.4).

El resultado de um comando pode chamar-se introduzindo um rótulo seguido de =. No nosso exemplo **S=Intersecção [g,h]** o novo ponto denomina-se  $S$ .

pode-se também usar índices com os nomes dos objectos:

$A_1$  resp.  $s_{AB}$  introduz-se : **A\_1** resp. **s\_AB**.

### 4.3.1. Comandos Gerais

#### Relação

**Relação[objectoa, objectob]** mostra um quadro que nos informa a relação de  $a$  e  $b$ .

Este comando permite-nos averiguar se dois objectos são iguais, se um ponto pertence a uma recta ou a uma cónica, o se uma recta é tangente ou intersecta uma cónica.

#### Excluir/Apagar

**Excluir/Apagar [objecto]** Apaga um objecto e todos seus dependentes.

### 4.3.2. Número

#### Comprimento

**Comprimento [vector]** - norma de um vector

#### Área

**Área[ponto A, ponto B, ponto C,...]** - Área do polígono definido pelos pontos marcados

**Comprimento[ponto A]** – Comprimento do vector de origem  $A$

## Distância

**Distância**[ponto A, ponto B] - Distância entre dois pontos A e B

**Distância**[ponto A, recta g] - Distância de um ponto A a uma recta g

**Distância**[recta g, recta h] - Distância entre as rectas g e h. A distância de rectas secantes é 0. Esta função tem interesse para rectas paralelas.

## Declive

**Declive**[recta] - declive de uma recta. Este comando também traça o triângulo que permite obter o declive cujo valor pode modificar-se (ver Propriedades, 3.1.1).

## Raio

**raio**[círculo] - Raio de um círculo

## Parâmetro

**parâmetro**[parábola] Parâmetro de uma parábola (Distância entre a directriz e foco)

## Comprimento do Eixo principal[]

**comprimento do Eixo principal**[cónica] – comprimento do eixo principal de uma cónica

## Comprimento do Eixo secundário[]

**comprimento do Eixo secundário**[cónica] – comprimento do eixo secundário de uma cónica.

## Excentricidade

**Excentricidade** [cónica] Excentricidade de uma cónica

## Integral

**Integral**[função f, número a, número b] - Integral definida de f de a até b. Este comando também traça a área entre o gráfico da função e o eixo dos xx.

**Integral[função f, função g, número a, número b]** - Integral definida de  $f(x) - g(x)$  desde  $a$  a  $b$ . Este comando traça também a área entre os gráficos das funções  $f$  e  $g$  a  $a$   $b$ . Este comando traça também a área entre os gráficos das funções  $f$  e  $g$ .

Consultar integral indefinida, 4.3.11.

### SomInferior

**Somainferior** [função  $f$ , número  $a$ , número  $b$ , número  $n$ ] soma inferior da função  $f$  no intervalo  $[a,b]$  com  $n$  rectângulos. Este comando também desenha os rectângulos da soma inferior.

### SomaSuperior

**Somasuperior** [função  $f$ , número  $a$ , número  $b$ , número  $n$ ] - Soma superior da função  $f$  no intervalo  $[a,b]$  com  $n$  rectângulos. Este comando também desenha os rectângulos da soma superior.

## 4.3.3. Ângulo

### Ângulo

**Ângulo**[vector, vector] - Ângulo entre dois vectores (entre 0 e 360-)

**Ângulo**[recta, recta] - Ângulo entre o vector director das rectas (entre 0 e 360-)

**Ângulo**[ponto A, ponto B, ponto C] - Ângulo entre BA e BC (entre 0 e 360). B é o vértice.

**Ângulo**[ponto A, ponto B, Ângulo alfa] - Ângulo de amplitude alfa traçado desde B com vértice no ponto A.

**Ângulo**[cónica] - Ângulo de revolução do eixo principal de uma cónica (4.3.9)

**Ângulo**[vector  $v$ ] - Ângulo entre o eixo  $x$  e o vector  $v$ .

**Ângulo**[ponto A] - Ângulo entre o eixo  $x$  e o vector de posição do ponto A

**Ângulo**[número] - Converte um número numa amplitude (resultado entre 0 e  $2\pi$ )

**Ângulo**[polígono] - Todos os ângulos internos de um polígono.

#### 4.3.4. Ponto

##### Ponto

**Ponto**[recta] Ponto sobre uma recta

**Ponto**[cónica] - Ponto sobre uma cónica (por exemplo. circunferência, elipse, hipérbole)

**Ponto**[função] - Ponto numa função

**Ponto**[vector] - Ponto num vector

**Ponto**[pontoP, vector v] - Ponto  $P + v$

##### *PontoMedio*

**PontoMedio** [pontoA, pontoB] - Ponto Médio de A e B

**PontoMédio** [segmento] - Ponto Médio de segmento

##### Centro

**Centro** [cónica] Centro de uma cónica (por exemplo: circunferência, Elipse, hipérbole)

##### Foco

**Foco** [cónica] (Todo) foco de uma cónica

##### Vértice

**Vértice** [cónica] (Todo) vértice de uma cónica

##### Centróide

**Centróide** [polígono] centróide de um polígono

##### Intersecção

**Intersecção** [recta g, recta h] Ponto de intersecção das rectas g e h

**Intersecção** [recta g, cónica c] Pontos de intersecção de g e c (máx. 2)

**Intersecção** [recta g, cónica c, número n] enésimo ponto de intersecção de g e c

**Intersecção** [cónica c, cónica d] Pontos de intersecção de c e d (máx. 4)

**Intersecção** [cónica c, cónica d, número n] enésimo ponto de intersecção de c e d

**Intersecção** [polinómio f, polinómio g] enésimo ponto de intersecção de f e g

**Intersecção** [polinómio f, recta g] Todos los pontos de intersecção de f e g

**Intersecção** [polinómio f, recta g, número n] enésimo ponto de intersecção de f e g

**Intersecção** [função f, função g, pontoA] – Ponto de intersecção de f e g com valor inicial A (para o método de Newton)

**Intersecção** [f função f, recta g, pontoA] Ponto de intersecção de f e g com valor inicial A

### Zero

**Zero** [polinómio f] Todas as raízes do polinómio f (como pontos)

### Raiz

**Raiz** [função f, número a] Uma raiz da função f com valor inicial A (para O método de Newton)

**Raiz** [função f, número a, número b] Uma raiz da função f no intervalo [a, b]

### Extremos

**Extremos**[polinómio f] -Todos os extremos local do polinómio f (como pontos)

### PontoInflexão

**PontoInflexão** [polinómio f]- Todos os pontos de inflexão do polinómio f

## 4.3.5. Vector

### Vector

**Vector** [pontoA, pontoB] - Vector de A até B

**Vector** [ponto] - Posição vectorial de um ponto

### Direcção

#### Direcção

direcção[recta] – define um vector director de uma recta. Uma recta cuja equação é  $ax + by = c$  tem direcção  $(b, -a)$ .

### Vector Unitário

**Vectorunitário**[recta] - Vector director de uma recta com norma igual a 1

**Vectorunitário**[vector] - vector de norma 1 e a mesma direcção e sentido que a do vector dado.(4.3.5)

### VectorPerpendicular

**Vectorperpendicular** [recta] - Vector perpendicular a uma recta.

Uma recta de equação  $ax + by = c$  - Tem um vector perpendicular  $(a, b)$ .

**Vectorperpendicular** [vector] - Vector perpendicular a um vector. Um vector com coordenadas  $(a, b)$  tem um vector perpendicular  $(-b, a)$ .

### Versor Perpendicular

**Vectorperpendicularunitário** [recta] - Vector de norma 1, perpendicular a uma recta.

**Versorperpendicularunitário** [vector] - Vector de norma 1, perpendicular a um vector.

## 4.3.6. Segmento

### Segmento

**Segmento** [pontoA, pontoB] - Segmento entre dois pontos A e B

**Segmento** [pontoA, número a] - Segmento com comprimento a desde o ponto A. Define-se , também, O extremo e o ponto A do segmento.

## 4.3.7. Semi-recta

### Semi-recta

**Semi-recta** [pontoA, pontoB] - Semi-recta que se inicia em A e passa por B **Semi-recta**

[pontoA, vector v] - Semi-recta que se inicia em A com direcção v

## 4.3.8. Polígono

### Polígono

**Polígono** [ pontoA, pontoB, pontoC, ...] Polígono definido pelos pontos marcados.

## 4.3.9. Recta

### Recta

**Recta** [pontoA, pontoB] - Recta entre dois pontos A e B

**Recta** [pontoA, rectag] - Recta paralela a g que passa por A

**Recta** [pontoA, vector v] - Recta com direcção v que passa por A



## Perpendicular

**Perpendicular** [pontoA, recta g] - Recta perpendicular a g que passa por A

**Perpendicular** [pontoA, vector v] - Recta perpendicular a v que passa por A

## Mediatriz

**Mediatriz** [pontoA, pontoB] - Mediatriz do segmento [AB]

**Mediatriz** [segmento s] - Mediatriz do segmento s

## Bissetriz

**Bissetriz** [pontoA, pontoB, pontoC] - Bissetriz do ângulo (A, B, C). B é O vértice do dito ângulo.

**Bissetriz** [recta g, recta h] - Bissetriz dos ângulos formados pelas rectas de g e h.

## Tangente

**Tangente** [pontoA, cónica c] - Tangente a c através de A

**Tangente** [recta g, cónica c] - Tangente a c que seja paralela a g

**Tangente** [númeroa, função f] - Tangente a  $f(x)$  em  $x=a$

**Tangente** [pontoA, função f] - Tangente a  $f(x)$  em  $x=x(A)$

## Assíptota

**Assíptota** [hipérbole c] - Ambas assíptotas a uma hipérbole

## Directriz

**Directriz** [parábola c] - Directriz de uma parábola

## Eixos

**Eixos** [cónica c] - Eixo principal e secundário de uma cónica

## PrimeiroEixo

**PrimeiroEixo** [cónica c] Eixo principal de uma cónica

## EixoSecundário

**EixoSecundario** [cónica c] Eixo secundário de uma cónica

## Polar

**Polar** [pontoA, cónica c] Recta polar que passa por A e c

## Diâmetro

**Diâmetro** [recta g , cónica c] Diâmetro paralelo a g relacionado com c

**Diâmetro** [vector v, cónica c] Diâmetro com direcção v relacionado com c

## 4.3.10. Cónicas

### Circunferência

**Circunferência** [pontoM, número r] Circunferência com centro M raio r

**Circunferência** [pontoM, segmento s] Circunferência com centro em M e raio igual ao comprimento do segmento s

**Círculo** [pontoM, pontoA] Circunferência com centro M que passa por A

**Circunferência** [pontoA, pontoB, pontoC] Circunferência que passa por A, B e C

### Elipse

**Elipse** [pontoF, pontoG, número a] Elipse com focos F, G e eixo principal de comprimento a. Condição:  $2a > \text{Distância}[F,G]$

**Elipse** [pontoF, pontoG, segmento s] Elipse com focos F, G e comprimento do eixo principal igual ao comprimento de s

### Hipérbole

**Hipérbole** [pontoF, pontoG, número a] - Hipérbole com focos F, G e eixo principal de comprimento a Condição:  $0 < 2a < \text{Distância}[F,G]$

**Hipérbole** [pontoF, pontoG, segmento s] - Hipérbole com focos F, G e comprimento do eixo principal = Comprimento [s]

### Parábola

**Parábola** [pontoF, recta g] -Parábola com foco F e directriz g

### Cónica

**Cónica** [pontoA, pontoB, pontoC, pontoD, pontoE] - cónica que passa por cinco pontos (quatro não colineares)

### 4.3.11. Função

#### Derivada

**Derivada** [função f] Derivada da função f

**Derivada** [função f, número n] enésima derivada da função f

#### Integral

**Integral** [função f] - Integral indefinida de f .Consultar integral definida, 4.3.2.

#### Polinómio

**Polinómio** [função f] - Resolve o polinómio.

Exemplo: Polinómio  $[(x - 3)^2] = x^2 - 6x + 9$

#### Polinómio de Taylor

**polinómiotaylor** [função f, número a, número n] expansão da série de potências de ordem n para a função f na proximidade do ponto  $x=a$

#### Função

**Função** [função f, número a, número b] estabelece uma função, que é igual a f não intervalo  $[a, b]$  e não está definida fora de  $[a, b]$

### 4.3.12. Arco e Sector

O valor algébrico de um arco é seu comprimento, o valor de um sector, seja a sua área.

#### Semicircunferência

**Semicircunferência** [pontoA, pontoB] -Semicircunferência sobre o segmento  $[AB]$ .

#### ArcoCircular

**Arcocircular** [pontoM, pontoA, pontoB] - Arco circular com ponto médio M entre dois pontos: A e B. Atenção: O ponto B não deve estar sobre o arco.

#### ArcoCircunferência

**Arcocircunferência** [ponto, ponto, ponto] - Arco de Circunferência que passa por três pontos.

## Arco

**Arco**[cónica c, pontoA, pontoB] - Arco de cónica entre dois ponto A e B da cónica c (circunferência ou elipse)

**Arco** [cónica c, número t1, número t2] - Arco de uma cónica entre dois valores paramétricos t1 e t2 para as seguintes formas paramétricas:

Circunferência:  $(r \cos(t), r \sin(t))$ , onde r é o raio da circunferência

Elipse:  $(a \cos(t), b \sin(t))$ , donde a e b são os comprimentos do primeiro e do segundo eixo

## Sector Circular

**Sectorcircular** [pontoM, pontoA, pontoB] Sector circular com ponto intermédio no ponto M entre dois pontos A e B. Atenção: O ponto B não deve estar sobre o arco.

## Arco de Circunferência

**arcocircunferência** [ponto, ponto, ponto] Arco de circunferência que passa em três pontos.

## Sector

**Sector** [cónica c, pontoA, pontoB] conjunto de pontos da cónica compreendidos entre dois pontos A e B da cónica c (círcunferência ou elipse)

**Sector** [cónica c, número t1, número t2] conjuntos dos pontos da cónica entre dois valores paramétricos t1 e t2 para as seguintes formas paramétricas:

*Circunferência:  $(r \cos(t), r \sin(t))$ , donde r é o raio da circunferência*

*Elipse:  $(a \cos(t), b \sin(t))$ , donde a e b são as comprimentos é do primeiro eixo e do segundo*

### 4.3.13. Imagem

#### Extremo

**Extremo** [imagem, número n] estabelece o extremo enésimo de uma imagem ( $n = 1, \dots, 4$ ).

### 4.3.14. Lugar Geométrico - *Locus*

#### Lugar Geométrico

**Lugar Geométrico** [pontoQ, pontoP] - Traça o lugar geométrico do ponto Q dependente do ponto P. O ponto P deve ser o ponto de um objecto (recta, segmento, circunferência, ..).

### 4.3.15. Transformações Geométricas

Si utilizarmos um dos seguinte comandos a um novo nome, se produzirá uma copia do objecto deslocado. O comando **Reflexão[A,g]** reflecte o ponto A através da recta g e o ponto A muda a sua ligação. Introduzindo **B=Reflexão[A,g]** produzir-se-á um novo ponto B

#### Translação

**Translação**[pontoA, vector v] - O ponto A sofre uma translação segundo o vector v

**Translação**[recta g, vector v] - A recta g desloca-se segundo o vector v

**Translação**[cónica c, vector v] - A cónica c desloca-se segundo o vector v

**Translação**[função c, vector v] -A função f desloca-se segundo o vector v

**Translação**[polígono P, vector v] O polígono P desloca-se segundo o vector v. Também se criam os novos vértices e os novos lados do polígono.

**Translação**[imagem p, vector v] – A imagem p desloca-se segundo o vector v.

**Translação**[vector v, pontoP] - O vector v desloca-se até o ponto P

#### Rotação

**Rotação**[pontoA, ângulo phi] O ponto A roda o ângulo phi à volta do eixo da origem

**Rotação**[vector v, ângulo phi] O vector v roda o ângulo phi

**Rotação**[recta g, ângulo phi] A recta g roda o ângulo phi do à volta eixo da origem.

**Rotação**[cónica c, ângulo phi] A cónica c roda o ângulo phi à volta do eixo da origem.

**Rotação**[polígono P, ângulo phi] O polígono P roda o ângulo phi à volta do eixo da origem. Também se criam novos vértices e segmentos.

**Rotação**[imagem p, ângulo phi] A imagem p roda um ângulo phi à volta do eixo da origem.

**Rotação**[ponto A, ângulo phi, ponto B] O ponto A roda e o ângulo phi à volta do ponto B

**Rotação**[recta g, ângulo phi, ponto B] A recta g roda O ângulo phi à volta do ponto B.

**Rotação**[cónica c, ângulo phi, ponto B] A cónica c roda O ângulo phi À volta do ponto B.

**Rotação**[polígono P, ângulo phi, pontoB] O polígono P roda um ângulo phi à volta do ponto B. Também se criam os novos vértices e segmentos.

**Rotação** [imagem p, ângulo phi, pontoB] A imagem p roda um ângulo phi em torno do ponto B.

## Reflexão

**Reflexão**[ponto A, ponto B] - Reflecte o ponto A pelo ponto B

**Reflexão**[recta g, ponto B] - Reflecte a recta g pelo ponto B

**Reflexão**[cónica c, ponto B] - Reflecte a cónica c pelo ponto B

**Reflexão**[polígono P, ponto B] - Reflecte o polígono P pelo ponto B. Também são criados os novos vértices e segmentos.

**Reflexão**[imagem p, ponto B] - Reflecte a imagem p pelo ponto B .

**Reflexão**[ponto A, recta h] - Reflecte O ponto A por a recta h.

**Reflexão**[recta g, recta h] Reflecte a recta g por a recta h.

**Reflexão**[cónica c, recta h] Reflecte a cónica c por a recta h.

**Reflexão**[polígono P, recta h] Reflecte o polígono P segundo o eixo da recta *h*. Também se criam os novos vértices e segmentos.

**Reflexão**[imagem p, recta h] Reflecte a imagem p segundo o eixo de simetria da recta *h*.

## Homotetia ou Dilação

**Homotetia**[ponto A, número f, ponto

S] - Define a imagem S do objecto A segundo o factor f

**Homotetia**[recta h, número f, ponto S] - Define a imagem h desde o ponto S segundo o factor f

**Homotetia**[cónica  $c$ , número  $f$ , ponto  $S$ ] - Define a imagem da cónica  $c$  desde o ponto  $S$  segundo o factor  $f$

**Homotetia**[polígono  $P$ , número  $f$ , ponto  $S$ ] - Define a imagem do polígono  $P$  desde o ponto  $S$  segundo o factor  $f$ . Também se criam os novos vértices e segmentos.

**Homotetia**[imagem  $p$ , número  $f$ , ponto  $S$ ] - Define a imagem da “imagem”  $p$  desde o ponto  $S$  segundo o factor  $f$ .

# Capítulo 5

## Imprimindo e exportando desde o GeoGebra

### 5.1. Imprimindo

#### 5.1.1. Zona Gráfica

No menu **Ficheiro**, a opção **Visualização de impressão da Zona Gráfica** permite especificar o título, autor, datas, ecrã de saída impressa (em *cm*).

Deve accionar **Enter** depois de qualquer mudança para actualizar a janela prévia.

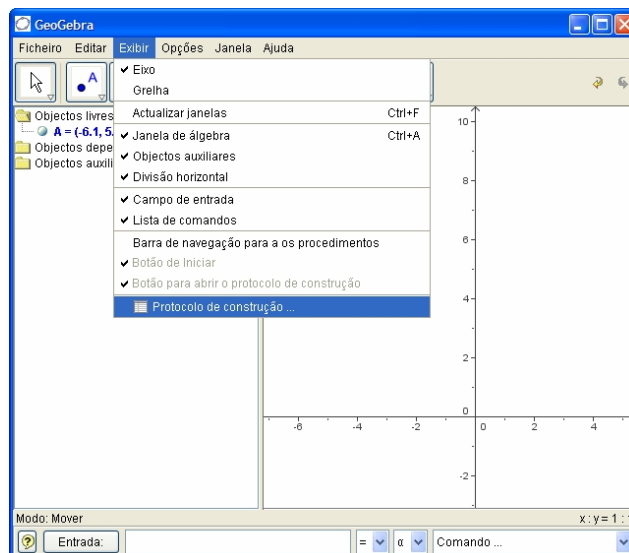
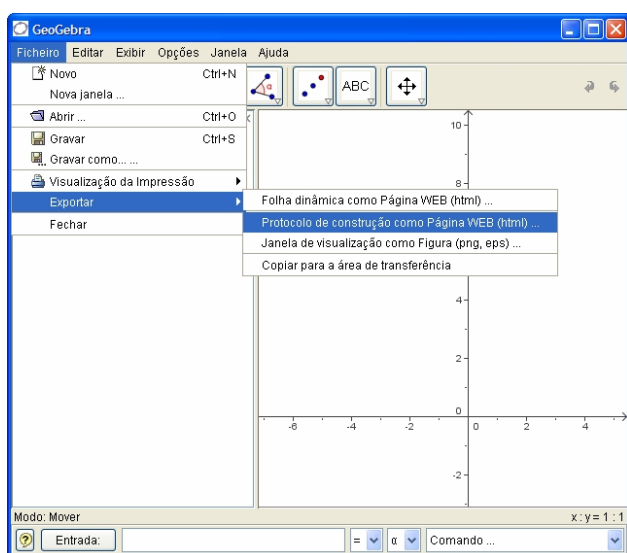
#### 5.1.2. Protocolo de Construção

Há duas maneiras de abrir a janela de vista prévia do protocolo de construção:

Não item **Visualização de Impressão** do menu **Ficheiro**, seleccionando a opção **Protocolo de Construção**.

Ao abrir em primeiro lugar **Protocolo de Construção**. do menu **Exibir**. Desta forma podemos aceder a opção **Visualização da impressão** no menu **Ficheiro**.

A segunda maneira é a mais flexível porque se pode-se (de)activar as diferentes colunas do protocolo de construção (consultar no Menu **Exibir** do protocolo de construção). Na *Janela de Visualização* pode-se inserir um título, autor e data.





## 5.2. Zona de Gráficos como Desenho

A opção **Exportar Zona de Gráficos como Desenho** se encontra no menu **Arquivo**, dentro da opção **Exportar**. Aqui, pode escolher ao formato a dimensão (em cm) e a resolução (em dpi) do ficheiro. A verdadeira medida da imagem exportada aparece ao pé da janela.

A exportação pode ser em dois formatos:

**PNG - Portable Network Graphics:** um formato gráfico em píxeis. Quanto maior é a resolução (dpi), melhor a qualidade (300 dpi será, suficiente). Ao aumentar um gráfico PNG perde-se qualidade,

Os ficheiros gráficos PNG são adequados para ilustrar páginas web(html) e documentos do Word ou OpenOffice. Quando se intercala um ficheiro PNG num documento Word, /OpenOffice através do menu **Inserir, Imagem desde ficheiro**, é necessário ter a certeza que a medida se fixa em 100 %. De outro modo, a escala dada (em cm) poderia modificar-se.

**EPS - Encapsulated Postscript:** É um formato gráfico vectorial. Os gráficos EPS podem alterar-se sem perda de qualidade. Os ficheiros gráficos EPS são os mais adequados para programas gráficos vectoriais como O CorelDraw e los sistemas de processamento de texto matemático como LATEX.

A resolução de um gráfico EPS gráfico é sempre 72 dpi. Este valor emprega-se somente para determinar a verdadeira medida de uma imagem em cm e não tem efeito sobre a qualidade da imagem.

Atenção: O efeito de cor transparente de polígonos ou cónicas não é possível no formato EPS.

## 5.3. Zona de Gráficos para a área de transferência

No menu **Ficheiro**, exporta o que se encontra na *Zona Gráfica ou de Desenho* como desenho oferece a opção de copiar a zona gráfica para a área de transferência do sistema como ficheiro PNG. Este desenho pode “colar-se” noutro programa (por exemplo: um documento Word/OpenOffice).

Para exportar uma construção a certa escala (em *cm*), utiliza-se a opção **Janela de Visualização como figura (png, eps)** .

## 5.4. Protocolo de Construção como Página Web

Há duas formas de abrir a janela de **Exportar | Protocolo de Construção**:

Não menu **Arquivo, Exportar** encontra-se o item **Protocolo de Construção como Página Web (html)**.

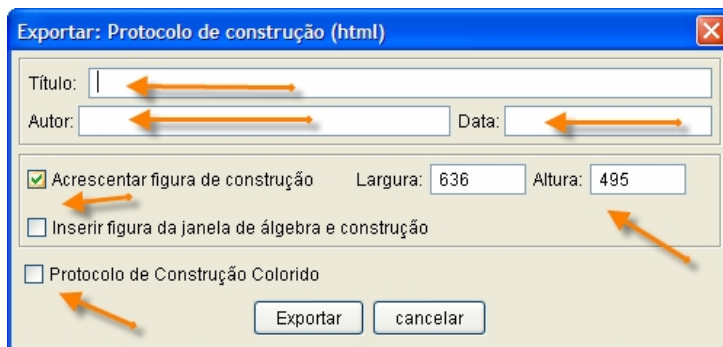
Não menu **Exibir**, abre-se primeiramente O **Protocolo de Construção**. Encontra-se o item **Exporta como Página Web** no menu **Ficheiro**.

A segunda alternativa é mais flexível porque pode ir (de)activando as diferentes colunas do protocolo de construção (ver o menu **Exibir** do protocolo de construção).

Na Janela de exportação, pode escolher um título, autor e data e

determinar se quer o não exportar também o desenho da zona gráfica e a *janela algébrica* assim como o protocolo.

O ficheiro HTML exportado pode ver-se com qualquer explorador de Internet (como o Mozilla, O Internet Explorer, o Firefox, o Ópera ...) e editar-se com qualquer processador de textos (como o FrontPage, O Word...).

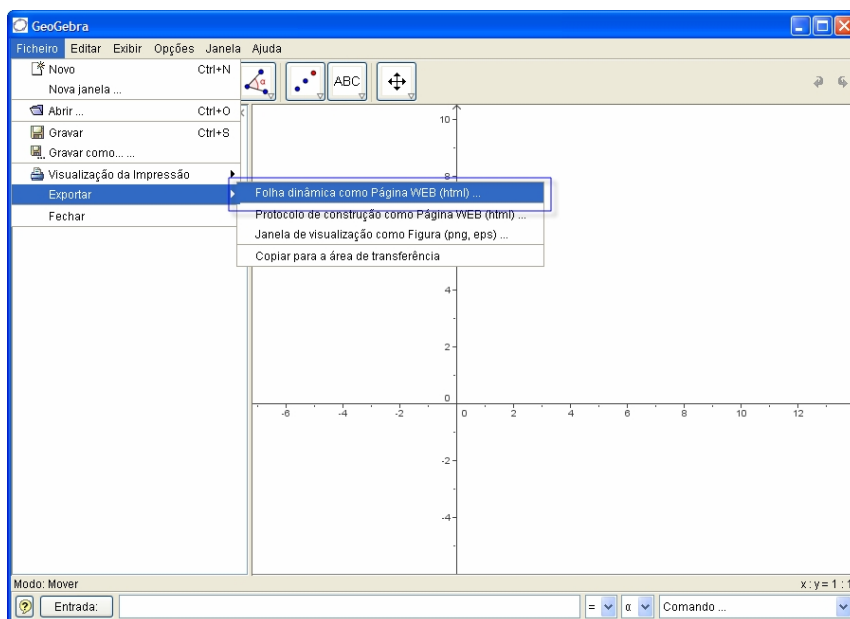


## 5.5. Documento como Página Web

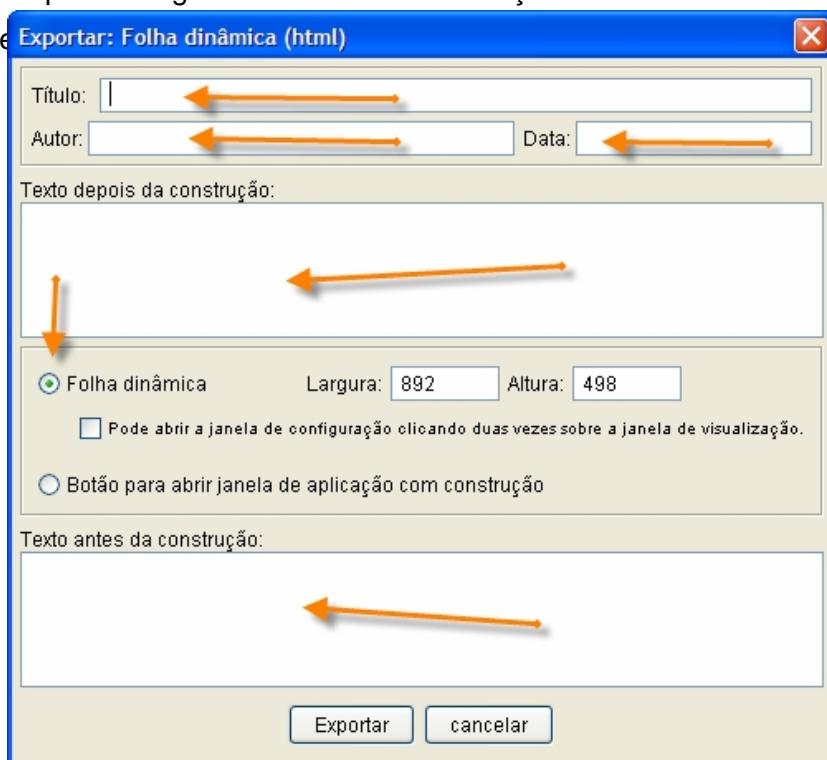
Na opção **Exportar** do menu **Ficheiro** encontra-se o item **Folha Dinâmica como Página Web (html)**.

Na janela de exportação, pode-se definir um título, autor, data e algum texto em a zona superior e inferior da construção dinâmica (por exemplo, uma descrição da construção e algumas exercícios). A construção pode incluir directamente na página Web ao abrir-se com um clique.

Atenção: os valores



que se definem para a largura e a altura da construção dinâmica não devem ser demasiado altos para que o navegador.



Ao exportar uma folha dinâmica criam-se três ficheiros:

- 1.) *Ficheiro html*, por exemplo, *circumf.html* - este ficheiro inclui a página.
- 2.) *Ficheiro ggb*, *circumf\_worksheet.ggb* - este ficheiro incluía correspondente construção do GeoGebra
- 3.) *Geogebra.jar* - este ficheiro inclui o GeoGebra e permite que a correspondente documento/folha seja interactiva.

Estes três ficheiros - por exemplo *circumf.html*, *circumf\_worksheet .ggb* e *geogebra.jar* - têm que estar dentro da mesma pasta para que a construção funcione dinamicamente. Obviamente, podem copiar-se os três ficheiros, para outra pasta.

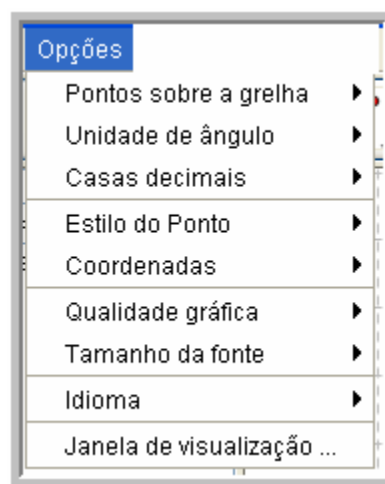
Atenção: O ficheiro HTML exportado - no exemplo *circumf.html* - pode ver-se com qualquer explorador de Internet (como Mozilla, Internet Explorer, Firefox, Ópera). Para que a construção opere dinamicamente, o computador deve ter instalado o Java. Pode-se descarregar gratuitamente o Java desde <http://www.java.com>. Para um documento em computadores em rede de numa Escola, deve-se solicitar ao administrador da rede, que instale o Java nos computadores.

Também se pode editar o texto da folha com a maior parte dos sistemas de processamento de texto (como FrontPage, Word, etc.), abrindo o ficheiro HTML exportado.

# Capítulo 6

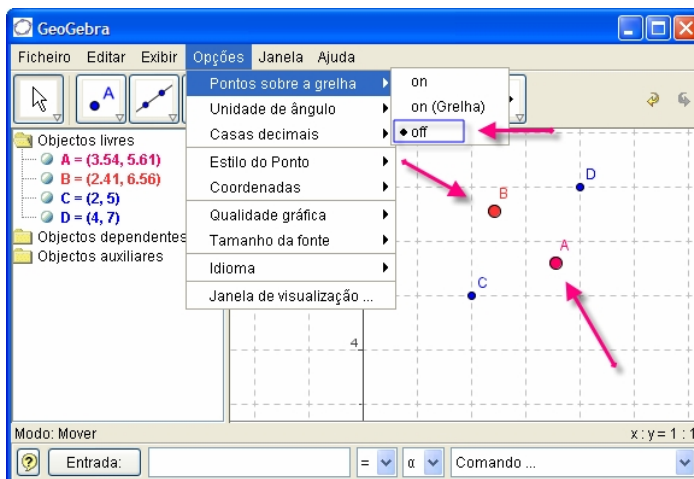
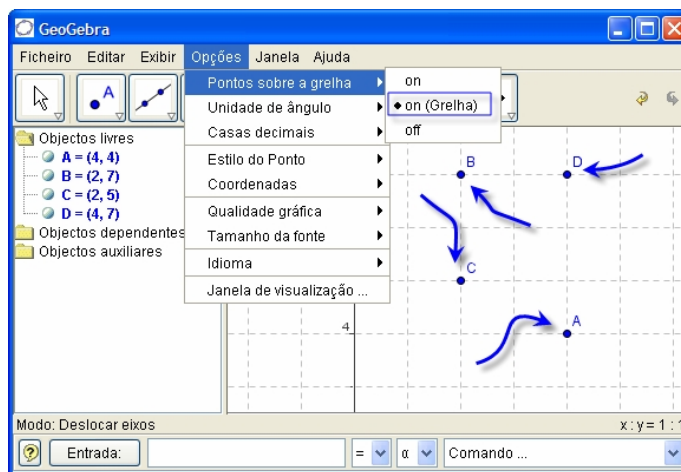
## Opções

As opções que definem o aspecto global, podem modificar-se no menu **Opções**. Para alterar o ajuste dos objectos, deve aceder aos outros menus (3.1.1).



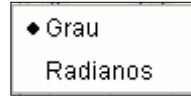
### 6.1. Pontos sobre a grelha

Permite activar ou desactivar a possibilidade dos pontos “aderirem” aos pontos da grelha.



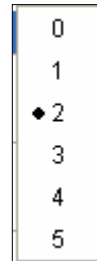
## 6.2. Unidade de Ângulo

Determina se os ângulos se expressam em graus ( $^{\circ}$ ) ou radianos (rad). É sempre possível introduzi-los dos dois modos (graus e radianos).



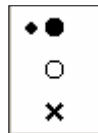
## 6.3. Casas Decimais

Ajusta o número de casas decimais: 0, 1, ..., 5



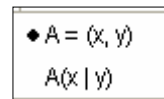
## 6.4. Estilo dos pontos

Define a forma dos pontos



## 6.5. Coordenadas

Forma de definir as coordenadas dos pontos



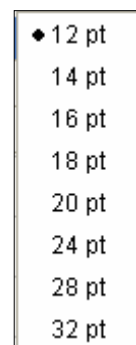
## 6.6. Qualidade gráfica

Define a qualidade dos gráficos na janela gráficos ou geométrica.



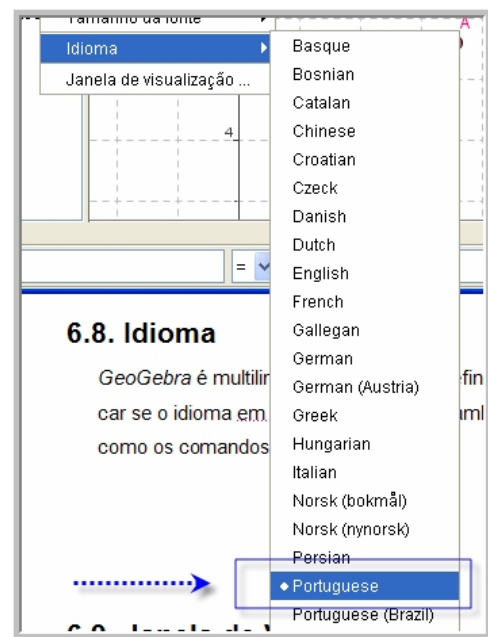
## 6.7. Tamanho da Fonte

Define o tamanho em pontos da fonte (tipo de letra).



## 6.8. Idioma

GeoGebra é multilingue. Aqui pode-se definir ou modificar se o idioma em uso. Afecta a todo o ambiente assim como os comandos



## 6.9. Janela de Visualização

Abre uma janela onde se podem ajustar as propriedades da zona gráfica (eixos, quadrícula, escala, cor,...)



# Índice Remissivo

---

## A

Ângulo · 24  
Animação · 3, 29  
Arco de Circunferência · 44  
ArcoCircular · 43  
Assíptota · 41

---

## B

Bissectriz · 21, 41

---

## C

Casas Decimais · 53  
Centro · 38  
Centróide · 2, 7, 38  
Circunferência · 22, 32, 42, 43, 44  
Comandos · 3, 29, 35  
Cónica · 2, 3, 22, 23, 32, 42  
Coordenadas · 31, 53  
Copiar estilo visual · 18

---

## D

Declive · 36  
Derivada · 43  
Directa · 3, 30  
Distância · 24, 36, 42

---

## E

Eixo dos  $xx$  · 31  
eixo dos  $yy$  · 31  
Elimina objecto · 18  
Elipse · 32, 38, 42, 44  
EPS · 49  
Excentricidade · 36  
Exportar · 49, 50  
Extremos · 39

---

## F

Ficheiro · 48, 50, 51  
Foco · 38  
Folha Dinâmica · 50  
Fonte · 53  
Função · 2, 3, 6, 12, 32, 33, 34, 43  
Função afim · 2, 6  
funções polinomiais · 11

---

## G

GeoGebra · 4  
grealha · 52

---

## H

homotetia · 25  
Homotetia · 25, 46, 47

---

## I

Idioma · 54  
Imagem de Fundo · 28  
Imagens · 2, 26, 27  
Imprimindo · 3, 48  
Integrais · 12  
Integral · 36, 37, 43  
Intersecção · 19, 35, 38, 39  
Intersecção de dois objectos · 19

---

## L

LATEX · 26, 49  
Locus · 2, 3, 25, 45

---

## M

Mediatriz · 21  
Menu de contexto · 14  
Mostrar e Esconder · 15  
Mover · 17

---

## N

Novo ponto · 19  
Número · 2, 3, 24, 35

---

## O

Opções · 17

---

## P

Parábola · 32, 42  
Parâmetro · 36  
PNG · 49  
Polígono · 20  
Polinómio de Taylor · 43  
Ponto · 19

**PontoInflexão** · 39  
**Pontos** · 3, 31, 38, 52  
**Posição** · 27, 39  
**Protocolo** · 2, 3, 15, 48, 50  
**Protocolo de Construção** · 15

---

## R

**Raio** · 36  
**Raiz** · 34, 39  
**Recta** · 2, 3, 21, 22, 31, 40, 41, 42  
**Recta entre dois pontos** · 21  
**Recta Paralela** · 21  
**Recta Perpendicular** · 21  
**Recta Polar** · 22  
**Reflexão** · 45, 46  
**Relação entre dois objectos** · 17  
**Relação entre Eixos** · 15  
**Rotação** · 17, 45, 46  
**Rotação à volta de um ponto** · 17

---

## S

**Sector** · 2, 3, 23, 43, 44  
**Sector circular** · 23, 44  
**Sector Circular** · 44  
**Segmento de recta** · 20  
**Segmento de recta entre dois pontos** · 20  
**Selecto** · 24  
**Semicircunferência** · 23, 43  
**Semi-recta** · 20  
**Semi-recta dados dois pontos** · 20  
**SomaInferior** · 37

**SomaSuperior** · 37

---

## T

**Tangente** · 9  
**Tangentes** · 22  
**Texto** · 2, 26  
**Traço** · 15  
**Transformações Geométricas** · 2, 3, 25, 45  
**Translação** · 45  
**Transparência** · 28

---

## V

**valores** · 3, 6, 26, 29, 30, 44, 50  
**Vector** · 19  
**Vector definido a partir de um ponto** · 20  
**Vector entre dois pontos** · 19  
**Vector Unitário** · 39  
**Vectores** · 3, 31  
**VectorPerpendicular** · 40  
**Versor** · 40  
**Vértice** · 27, 38  
**Visualização** · 48, 49, 54

---

## Z

**Zero** · 39  
**Zona de Gráficos** · 49  
**Zoom** · 15